

Tema: Fracciones.

Fracción propia, fracción impropia, número mixto y conversión de número mixto a fracción impropia

Recuerda que los elementos de una fracción son:

- $\frac{2}{3}$ —→ Numerador: indica las partes que se han tomado del entero
- $\frac{2}{3}$ —→ Denominador: indica el número de partes en que se divide el entero

También recordemos que una:

Fracción común propia

Es la que vale menos que un entero y se conoce porque su numerador es menor que su denominador.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{5}{17} \quad \frac{26}{30} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{23} \quad \frac{2}{11}$$

Fracción común impropia

Es la que vale un entero o más y se conoce porque el numerador es igual o mayor que el denominador.

$$\frac{17}{7} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{27}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{46}{9} \quad \frac{33}{6} \quad \frac{100}{47} \quad \frac{9}{4}$$

Número mixto

Es el formado por un **número entero** y una **fracción propia** juntos

$$2\frac{2}{5} \quad 9\frac{2}{17} \quad 5\frac{1}{3} \quad 7\frac{7}{11} \quad 3\frac{9}{22} \quad 1\frac{1}{2}$$

Conversión de números mixtos a fracciones impropias.

Sigue los siguientes pasos:

- Multiplica la parte entera por el denominador de la fracción común y al producto súmalo el numerador de la fracción.
- Después escribe el resultado obtenido como numerador
- Y la fracción tendrá como denominador el que tenía el número mixto.

$$2\frac{4}{7} = \frac{18}{7} \quad 6\frac{2}{3} = \frac{20}{3} \quad 1\frac{5}{9} = \frac{14}{9} \quad 5\frac{2}{13} = \frac{67}{13}$$

$$2 \times 7 + 4 = 18 \quad 6 \times 3 + 2 = 20 \quad 1 \times 9 + 5 = 14 \quad 5 \times 13 + 2 = 67$$

Conversión de fracciones impropias a números mixtos.

Sigue los siguientes pasos:

- Divide el numerador entre el denominador.
- El cociente será tu parte entera y el residuo será tu numerador de tu fracción propia.
- Y la fracción propia tendrá como denominador el que tenía la fracción impropia.

$$\frac{47}{11} = 4 \frac{3}{11}$$

$$\begin{array}{r} 4 \rightarrow \text{cociente} \\ 11 \overline{) 47} \\ \underline{44} \\ 3 \rightarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$\frac{48}{17} = 2 \frac{14}{17}$$

$$\begin{array}{r} 2 \rightarrow \text{cociente} \\ 17 \overline{) 48} \\ \underline{34} \\ 14 \rightarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$\frac{15}{11} = 1 \frac{4}{11}$$

$$\begin{array}{r} 1 \rightarrow \text{cociente} \\ 11 \overline{) 15} \\ \underline{11} \\ 4 \rightarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$\frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 4 \rightarrow \text{cociente} \\ 3 \overline{) 14} \\ \underline{12} \\ 2 \rightarrow \text{residuo} \end{array}$$

Ejercicio 1

De Las siguientes fracciones circula las propias y tacha las impropias:

$$\frac{7}{9} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{16}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{17}{10} \quad \frac{8}{23} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{16}{4} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{3}$$

Ejercicio 2

Convierte los siguientes números mixtos a fracciones impropias:

$$6 \frac{2}{5} = \quad 3 \frac{4}{7} = \quad 8 \frac{1}{3} = \quad 1 \frac{5}{10} = \quad 4 \frac{2}{13} =$$

$$9 \frac{3}{4} = \quad 2 \frac{10}{11} = \quad 11 \frac{6}{19} = \quad 3 \frac{13}{15} = \quad 14 \frac{2}{5} =$$

Ejercicio 3

Convierte las siguientes fracciones impropias a números mixtos:

$$\frac{41}{13} = \quad \frac{33}{8} = \quad \frac{41}{9} = \quad \frac{37}{5} = \quad \frac{29}{6} =$$

$$\frac{27}{4} = \quad \frac{16}{7} = \quad \frac{16}{10} = \quad \frac{25}{2} = \quad \frac{33}{20} =$$

Conversión de fracción común a fracción decimal.

Las fracciones no son tan complicadas como podrías creer, para convertir fracciones comunes a decimales necesitas seguir un sólo paso muy simple.

Divides el numerador entre el denominador:

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ 4 \overline{) 10} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{2}{3} = 0.66$$

$$\begin{array}{r} 0.66 \\ 3 \overline{) 20} \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{5}{2} = 2.5$$

$$\begin{array}{r} 2.6 \\ 2 \overline{) 5} \\ \underline{4} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

Conversión de fracción decimal a fracción común.

Una fracción decimal es una fracción cuyo denominador es 10 ó una potencia de 10.

Para hacer la conversión sólo fíjate en: si son décimos se divide entre 10, si son centésimos se divide entre 100, si son milésimos se divide entre 1 000, si son diezmilésimos se divide entre 10 000, y así sucesivamente.

0.17 Son centésimos, se divide entre 100: $\frac{17}{100}$

0.024 Son milésimos, se divide entre 1000: $\frac{24}{1000}$ Simplificando $\frac{12}{500} = \frac{6}{250} = \frac{3}{125}$

0.5 Son decimos, se divide entre 10: $\frac{5}{10}$ Simplificando $\frac{1}{2}$

0.00003 Son cienmilésimos, se divide entre 100000: $\frac{3}{100000}$

Ahora fíjate lo que se hace cuando hay enteros:

4.035 Son milésimos, se divide entre 1000: $4 \frac{35}{1000}$ Simplificando $4 \frac{7}{200} = \frac{807}{200}$

27.25 Son centésimos, se divide entre 100: $27 \frac{25}{100}$ Simplificando $27 \frac{1}{4} = \frac{109}{4}$

6.125 Son milésimos, se divide entre 1000: $6 \frac{125}{1000}$ Simplificando $6 \frac{1}{8} = \frac{49}{8}$

Ejercicio 1

Convierte las siguientes fracciones comunes a fracción decimal

$$\frac{4}{5} =$$

$$\frac{9}{4} =$$

$$\frac{16}{3} =$$

$$\frac{7}{12} =$$

$$\frac{7}{8} =$$

$$\frac{22}{30} =$$

Ejercicio 2

Convierte las siguientes fracciones decimales a fracción común o número mixto

$$0.18 =$$

$$0.178 =$$

$$0.7 =$$

$$0.245 =$$

$$0.0005 =$$

$$0.03 =$$

$$0.345 =$$

$$0.25 =$$

$$2.6 =$$

$$17.000005 =$$

$$8.088 =$$

$$9.005 =$$

$$0.00345 =$$

$$476.9 =$$

$$0.000065 =$$

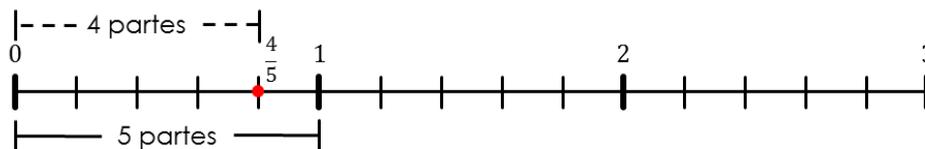
$$2.2 =$$

Localización en la recta numérica de fracciones comunes y decimales.

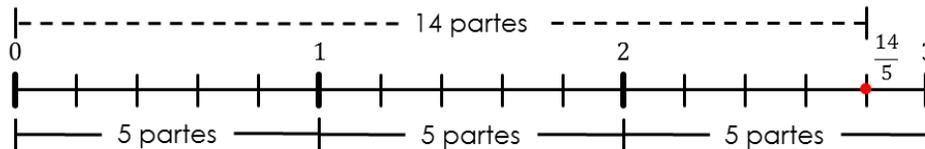
La recta numérica es una línea recta en la que asociamos cada número con un punto de la recta.

Ejemplo

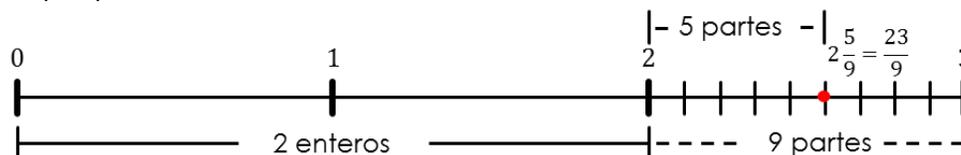
Para localizar $\frac{4}{5}$ se divide cada entero en 5 partes ya que el denominador es 5 y se toman 4 porque el numerador es 4.



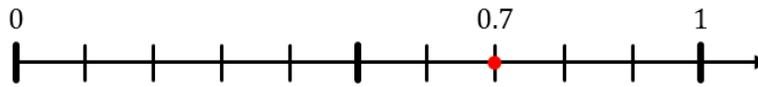
Para localizar $\frac{14}{5}$, se divide cada entero en 5 partes y se toman 14 partes.



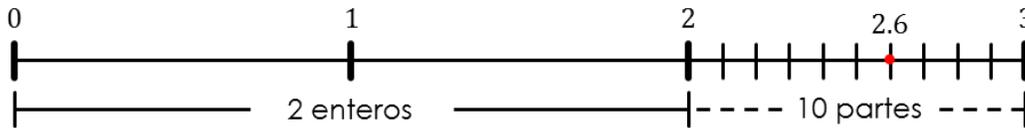
Ahora para localizar el número mixto $2\frac{5}{9}$, se toman los enteros y se ubica la fracción propia.



Para localizar el número decimal 0.7 observamos que es un número comprendido entre 0 y 1. Dividimos el segmento unidad entre los números 0 y 1 en 10 partes iguales ya que son décimos y tomamos 7 de esas 10 partes.



Ahora localicemos 2.6



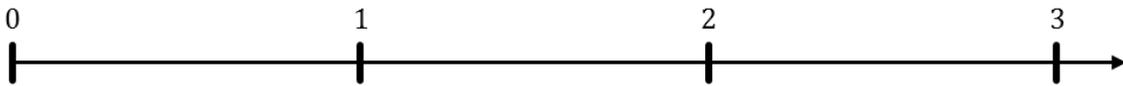
Ejercicio 1

Ubica en la recta numérica las fracciones comunes que se te indican.

- 1.- $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{10}{5}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{15}{5}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{14}{10}$ $\frac{30}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{4}{20}$ $\frac{17}{20}$



- 2.- $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{11}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{22}{8}$ $\frac{12}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{16}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{26}{16}$ $\frac{1}{16}$



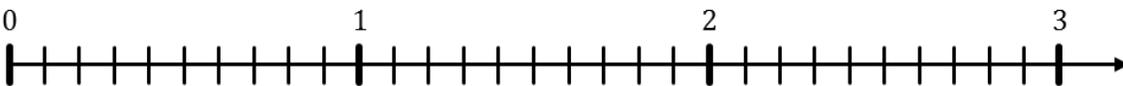
- 3.- $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{20}{9}$ $\frac{18}{9}$ $\frac{15}{9}$ $\frac{27}{9}$ $\frac{21}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{6}{18}$ $\frac{30}{18}$



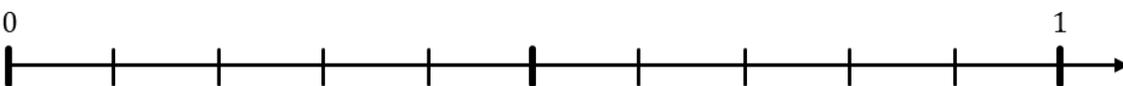
Ejercicio 2

Ubica en la recta numérica las siguientes fracciones decimales

- 1.- 0.2 0.1 0.5 2.3 0.8 0.9 1.1 2.8 1.6 2.5 1.8 0.3 2.9 0.4 1.5

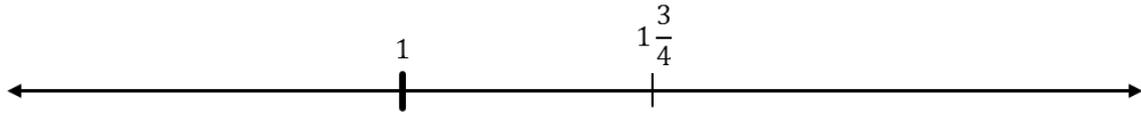


- 2.- 0.18 0.63 0.50 0.98 0.40 0.24 0.35 0.76 0.80 0.62 0.39 0.59

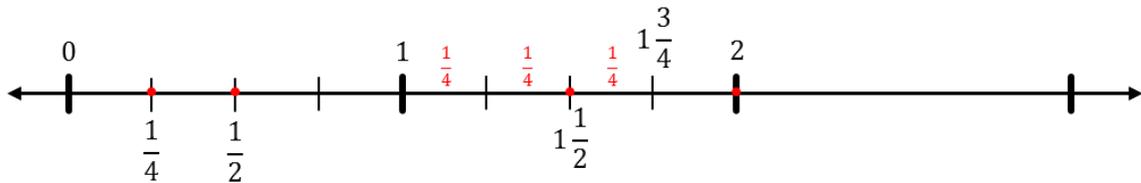


Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones.

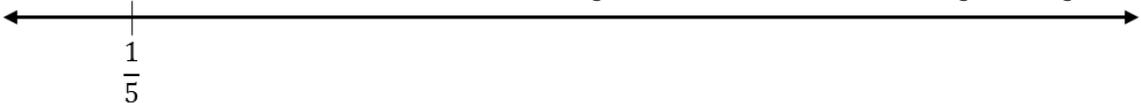
Observa la siguiente recta numérica, vamos a localizar en ella a: $\frac{1}{2}$, 2 , $1\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{4}$. No olvides que al haber dos valores ubicados en la recta numérica está definida la posición de cero.



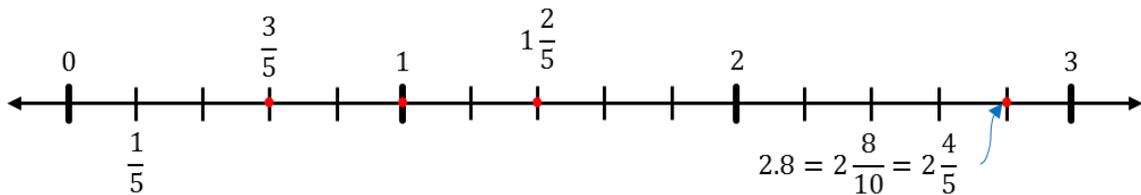
Observa que de 1 a $1\frac{3}{4}$, existen $\frac{3}{4}$, por lo que se divide nuestro segmento en tres partes iguales y cada parte será $\frac{1}{4}$, y con esta medida ya puedes ubicar al cero así como los demás valores, como se muestra a continuación.



Otro ejemplo es donde sólo se localiza $\frac{1}{5}$ y tienes que localizar $\frac{3}{5}$, 1 , $1\frac{2}{5}$ y 2.8

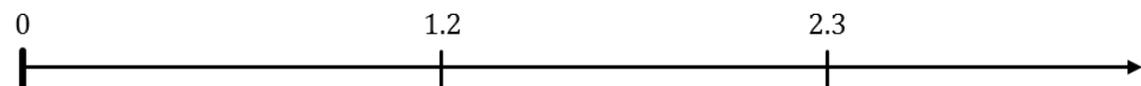


En esta recta numérica no está ubicado el número cero, por lo cual se puede localizar donde tú creas que sea más adecuado, nada más fíjate que haya el espacio suficiente para ubicar los enteros y fracciones que tienes que localizar.

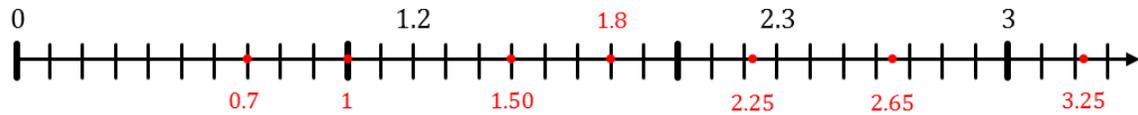


También para localizar fracciones decimales hacemos lo mismo:

En la siguiente recta numérica se tienen localizados los números 0 , 1.2 y 2.3 . Y te piden localizar las fracciones decimales 1.50 , 2.25 , 1.8 , 2.65 , 0.7 , 3.25 y 1

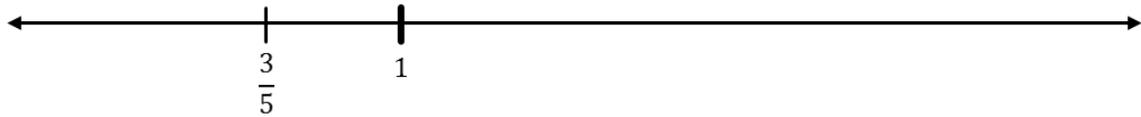


Ve que del 0 al 1.2 debe haber 12 divisiones de igual tamaño, así como del 1.2 al 2.3 debe haber 11 divisiones de igual tamaño que las anteriores y ahora sí a ubicar lo que se te pide

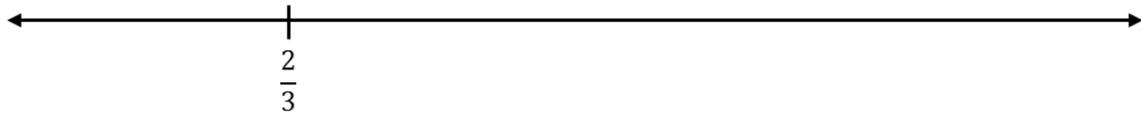
**Ejercicio 1**

Localiza en la recta numérica las siguientes fracciones

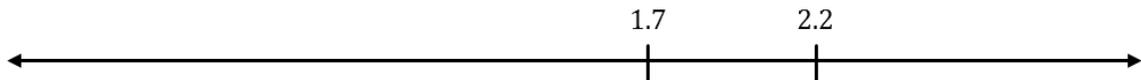
1) Localiza: $1\frac{1}{2}$, 0.8 , $\frac{8}{5}$ y $\frac{3}{10}$



2) Localiza: 1.5, 0, $1\frac{1}{6}$ y 2



3) Localiza: 1.250, $\frac{3}{2}$, $1\frac{4}{5}$, 1.80 y $\frac{5}{4}$



Crterios de divisibilidad

Sirven para saber si un número es **divisible** entre otro sin necesidad de realizar la división.

Divisible significa que al dividirlo entre ese número el resultado es una división exacta con residuo cero. Por ejemplo, 30 es divisible entre 5 porque al dividirlo entre 5 el residuo es cero $30 \div 5 = 6$

Divisibilidad entre 2

Un número es divisible entre 2 si termina en 0 o cifra par (2, 4, 6, 8).

Ejemplos:

2, 38, 94, 521 346, 40,...

Divisibilidad entre 3

Un número es divisible entre 3 si la suma de todos sus dígitos es un múltiplo de 3.

Ejemplos:

36, 2 142, 42, 2 439, 717, 30 651,...

Divisibilidad entre 4

Un número es divisible entre 4 cuando sus dos últimos dígitos son ceros o forman un múltiplo de 4.

Ejemplos:

216, 64, 860, 1 500

Divisibilidad entre 5

Un número es divisible entre 5 si la última cifra es 5 ó 0.

Ejemplos:

35, 2 145, 400, 367 870, 85,...

Divisibilidad entre 6

Un número es divisible entre 6 cuando es divisible entre 2 y 3 a la vez; es decir, tiene que ser par o terminar en 0 y la suma de todas sus cifras ser un múltiplo de 3

Ejemplos:

132, 654, 552

Divisibilidad entre 8

Un número es divisible entre 8 cuando sus tres últimos dígitos son ceros o forman un múltiplo de 8.

Ejemplos:

6 120, 120 000, 12 520,

Divisibilidad entre 9

Un número es divisible entre 9 si la suma de todas sus cifras es un múltiplo de 9.

Ejemplos:

495, 945, 53 640, 1 764,...

Divisibilidad entre 10

Un número es divisible entre 10 si termina en 0.

Ejemplos:

70, 234 140, 900, 7 870, 858 670,...

Estos criterios son importantes dado que te facilitan el cálculo de la **descomposición de factores** que a su vez sirven para reducir y simplificar fracciones.

Ejercicio

Coloca una **X** en la columna que corresponda.

Número	Divisible entre 2	Divisible entre 3	Divisible entre 4	Divisible entre 5	Divisible entre 6	Divisible entre 8	Divisible entre 9	Divisible entre 10
311 040								
270								
1 080								
54								
224								
2 160								
360								
524								
2 142								
6 120								

Números primos y compuestos

Los números primos son aquellos que sólo admiten dos divisores, la unidad y el mismo número: como 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, etc.

Los números compuestos son aquellos que admiten más de dos divisores como 4, 6, 8, 9, 10, 12, etc.

El número 1, sólo tiene un divisor, y se llama unitario o unidad.

Factorización

Para descomponer números en factores primos puedes utilizar divisiones sucesivas entre números primos, empezando por el número 2, hasta tener como residuo cero.

Los factores primos de 60 se obtienen:

$$\begin{array}{r} 30 \\ 2 \overline{)60} \\ \underline{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 2 \overline{)30} \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 3 \overline{)15} \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{)5} \\ \underline{0} \end{array}$$

Observa que dividiste entre:

2, 2, 3, 5 y éstos son los factores primos, es decir:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Puedes facilitar el procedimiento colocando una línea vertical para indicar, las divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ \hline 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Factores primos

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Ejercicio 1

Escribe en donde corresponda, los números primos y compuestos:

21, 16, 12, 30, 17, 24, 40, 29, 35, 56, 45, 46, 4, 14, 11, 51, 7, 28, 3, 46, 25, 31, 70

Numero Primos

Números Compuestos

Ejercicio 2

Obtén los factores primos de los siguientes números y escríbelos sobre la línea correspondiente:

1) 75 |

2) 90 |

3) 525 |

4) 330 |

75 = _____

90 = _____

525 = _____

330 = _____

5) 648 |

6) 144 |

7) 150 |

8) 224 |

648 = _____

144 = _____

150 = _____

224 = _____

9) 324 |

10) 15 |

11) 470 |

12) 720 |

324 = _____

15 = _____

470 = _____

720 = _____

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Se llama mínimo común múltiplo de dos o más números al menor de sus múltiplos comunes.

Se designa por las iniciales **m.c.m.**

Ejemplo:

El mínimo común múltiplo de 12 y 30 es:

12: 12, 24, 36, 48, 60, 72,

30: 30, 60, 90, 120, 150,

Ve que el múltiplo común menor de 12 y 30 es 60; simbolizando tenemos:

m.c.m. (12 y 30) = 60

Una manera más sencilla para obtener el **m.c.m.** es obteniendo los factores primos con mayores exponentes y multiplicarlos.

Ejemplo:

Obtén el mínimo común múltiplo de 12 y 30

Observa que los dos números tienen como factor común a 2

$$12 = 2^2 \times 3 \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Este factor común difiere en el exponente y se elige al mayor exponente que es 2^2

Otro factor común es el 3, como tienen el mismo exponente se elige cualquier 3

$$12 = 2^2 \times 3 \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Además hay un factor no común que es 5

$$12 = 2^2 \times 3 \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Y para obtener el mínimo común múltiplo, se multiplica el factor común de mayor exponente, por los factores no comunes.

$$\text{m.c.m. (12, 30)} = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$= 4 \times 3 \times 5$$

$$\text{m.c.m. (12, 30)} = 60$$

Ejercicio 1

Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) m.c.m. (9, 18) = b) m.c.m. (18, 30, 24) = c) m.c.m. (15, 65, 25) =

d) m.c.m. (20, 40, 60) = e) m.c.m. (50, 75, 100) = f) m.c.m. (60, 45, 50) =

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. El número de días que han de transcurrir como mínimo para que tres agentes viajeros vuelvan a coincidir en Guadalajara ya que el primero tarda en su recorrido 18 días, el segundo 15 días y el tercero 8 días.
2. Los soldados de un regimiento pueden formar filas de dos en dos, de tres en tres, de cuarenta y ocho en cuarenta y ocho, de ciento veinte en ciento veinte y de ciento veintiséis en ciento veintiséis, sin que sobre ni falte ninguno. ¿Cuántos soldados integran el regimiento?
3. Por una parada de autobuses pasa el autobús de la línea 1 cada 48 min; el de la línea 2, cada 36 min, y el de la línea 3, cada 60 min. Si los tres autobuses han coincidido en la parada a las 16:00 horas, ¿a qué hora volverán a coincidir?

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Se llama máximo común divisor de dos o más números al mayor de sus divisores comunes.

Se designa por las iniciales **M.C.D.**

Para calcular el **M.C.D.** de dos o más números, se descompone cada uno en sus factores primos.

Ejemplo:

Calcula el M.C.D. de los números 24, 48, 72 =

24	48	72	2
12	24	36	2
6	12	18	2
3	6	9	2
3	3	9	3
1	1	3	3
		3	3
		1	

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

Los números tienen divisores comunes que son 2 y 3, posteriormente se elige el divisor común con menor exponente los divisores comunes 2^3 y 3, que al tener el mismo exponente no presentan problemas ya que cualquiera que se escoja es igual.

$$\mathbf{M.C.D. (24, 48, 72) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24}$$

Ejercicio 1**Calcula el M. C. D. de los siguientes números:**

a) M.C.D. (15, 30) = b) M.C.D. (24, 36, 48) = c) M.C.D. (140, 160, 100) =

a) M.C.D. (60, 40, 30) = b) M.C.D. (50, 75, 100) = c) M.C.D. (40, 48, 72) =

Ejercicio 2**Resuelve los siguientes problemas:**

1. Se tienen tres rollos de listón de 8m, 12m y 60m respectivamente. Si se deben cortar en tramos iguales de la mayor medida posible, sin que falte o sobre listón ¿De qué medida tiene que ser cada tramo? y ¿Cuántos tramos resultarán de cada rollo?
2. Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
3. Diego cuenta con 12 juguetes, 36 chocolates y 48 dulces. Desea hacer unas cajas sorpresas iguales que contengan lo mismo para sus amigos. ¿Cuál es la cantidad de cajas que puede formar?
4. Leticia tiene tres carretes con hilo cáñamo, uno de 30 cm, otro de 20 cm y el último de 80 cm y desea cortarlos en tramos de igual medida sin que le sobre nada- ¿Cuál es el máximo tamaño que pueda tener los trozos de cáñamo?
5. Pablo compró una canasta de 24 huevos y otra de 36 huevos. Para venderlos, Pablo debe empacarlos en cajas pequeñas del mismo tamaño que contengan el mismo número de huevos. ¿Cuál es el mayor número de huevos que puede empacar Pablo en cada caja, si no debe sobrar ni faltar ninguno? ¿De cuántas cajas debe disponer?

6. En un colegio hay 120 niños y 180 niñas en el quinto grado. Si se desea formar grupos con igual cantidad de estudiantes, de manera que en cada grupo haya niños y niñas, ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar? ¿Cuántos niños y cuantas niñas habrá en cada grupo?
7. Se quieren empaquetar 48 pastelitos de chocolate y 72 pastelitos de crema en cajas iguales lo más grande posible. ¿Cuál será el número de pastelitos en cada bandeja?

Adición y sustracción de fracciones comunes con igual denominador

Sólo se suman o restan según sea el caso los numeradores y se anota el mismo denominador.

Recuerda siempre sacar enteros si la fracción es impropia o simplificar.

Siempre ten presente que para obtener los enteros necesitas realizar la división y para simplificar una fracción a su mínima expresión, se dividirán sus dos términos sucesivamente por los divisores comunes que tengan, hasta que resulte una fracción irreducible.

Ejemplo:

$$\frac{11}{15} + \frac{14}{15} = \frac{25}{15} = 1 \frac{10}{15} = 1 \frac{2}{3}$$

↳ Fracción impropia se debe sacar enteros

$$\frac{23}{10} - \frac{15}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

↳ Simplificación

Adición y sustracción de fracciones comunes con diferente denominador

Se obtiene el m.c.m. de los denominadores, el número obtenido será el denominador común, el m.c.m. se **divide** entre el denominador de la primera fracción y el cociente obtenido se **multiplica** por el numerador de esa fracción. El número obtenido se coloca como sumando en el numerador de la fracción resultante y se procede igual para el resto de las fracciones; en la sustracción se siguen los mismos pasos, sólo que los números obtenidos se restan.

Ejemplo:

$$30 \div 15 = 2 \times 5 = 10$$

(2) Se multiplica $\left(\frac{5}{15} + \frac{2}{3} + \frac{9}{10} = \frac{10}{30} \right)$

(1) Se divide

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 & 10 & 2 \\ 15 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{m.c.m. (15, 3, 10)} = 30$$

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\frac{5}{15} + \frac{2}{3} + \frac{9}{10} = \frac{10 + 20 + 27}{30} = \frac{57}{30} = 1 \frac{27}{30} = 1 \frac{9}{10}$$

Ejemplo

(2) Se multiplica $\left(\frac{11}{10} - \frac{7}{8} = \frac{44 - 35}{40} = \frac{9}{40} \right)$

(1) Se divide

$$\begin{array}{r|l} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{m.c.m. (10, 8)} = 40$$

$$= 2^3 \times 5$$

Adición y sustracción con números mixtos

Se convierten los números mixtos a fracciones impropias (multiplicando el denominador de la fracción por el entero y al producto obtenido se le suma el numerador), y se deja el mismo denominador de la fracción del número mixto.

Ejemplo:

$$5 \frac{2}{3} + 6 \frac{4}{8} + 3 \frac{1}{6} = \frac{17}{3} + \frac{52}{8} + \frac{19}{6} = \frac{136 + 156 + 76}{24} = \frac{368}{24} = 15 \frac{8}{24} = 15 \frac{1}{3}$$

$$6 \frac{3}{4} - 3 \frac{1}{2} = \frac{27}{4} - \frac{7}{2} = \frac{27 - 14}{4} = \frac{13}{4} = 3 \frac{1}{4}$$

Ejercicio 1**Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones**

1) $\frac{6}{4} + \frac{10}{4} + \frac{3}{4} =$

6) $3\frac{2}{7} + 2\frac{4}{7} =$

2) $\frac{2}{15} + \frac{13}{15} + \frac{8}{15} + \frac{7}{15} =$

7) $\frac{2}{15} + \frac{13}{15} + \frac{8}{15} + \frac{7}{15} =$

3) $\frac{11}{10} - \frac{7}{8} =$

8) $4\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + 2\frac{5}{6} =$

4) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$

9) $\frac{4}{12} - \frac{3}{16} =$

5) $\frac{9}{10} - \frac{2}{8} =$

10) $9\frac{5}{6} - 4\frac{9}{10} =$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. El maestro de electricidad tenía $10\frac{1}{2}m$ de cable eléctrico. Lo usó para mostrar cómo se hace una conexión y le ha quedado $7\frac{3}{4}m$, ¿Cuánto cable utilizó en la conexión?
2. Elisa compra $\frac{3}{4}kg$ de papas, $\frac{1}{2}kg$ de carne y $1\frac{2}{5}kg$ de tortillas, ¿Cuánto pesa todo junto?
3. De una pieza de tela de $20\frac{1}{2}m$ se vendieron 2 retazos de $3\frac{1}{2}m$ y $4\frac{3}{4}m$. ¿Qué cantidad de tela queda sin vender?

4. En la Delegación Política Benito Juárez se realiza una competencia de ciclismo, en la que se tienen que recorrer, $65\frac{1}{4} km$ y en la cual Eduardo lleva recorridos $40\frac{3}{4} km$ ¿Qué distancia le falta para llegar a la meta?
5. El Satélite "Explore 40" tiene un peso de $\frac{28}{125}$ toneladas y el Satélite "Anna I-B" pesa $\frac{4}{25}$ de tonelada ¿Cuál es la diferencia de peso entre ambos satélites?
6. En un grupo $\frac{2}{4}$ del total de alumnos votó por Juan, $\frac{2}{5}$ votaron por Alfredo y $\frac{1}{10}$ votaron por René. ¿Votaron los 60 alumnos del grupo?
7. Para hacer un vestido se necesitan: $\frac{3}{4}m$ de tela azul, $\frac{3}{8}m$ de tela amarilla y $\frac{3}{9}m$ de tela roja ¿Cuánta tela en total se usará para elaborar el vestido?

Operaciones combinadas de fracciones comunes

Hay veces que se tienen que aplicar varias operaciones y siempre debes tener presente lo siguiente para poder resolverlas:

- 1º Convertir las fracciones mixtas y números decimales a fracción común.
2º Efectuar las adiciones y sustracciones

Ejemplo:

$$5\frac{2}{3} + 6\frac{4}{8} - 3\frac{1}{6} = \frac{17}{3} + \frac{52}{8} - \frac{19}{6} = \frac{136 + 156 - 76}{24} = \frac{216}{24} = 9$$

$$6\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{27}{4} - \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = \frac{27 - 14 + 1}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Recuerda que siempre debes simplificar las fracciones y convertir a número mixto cuando se requiera, es decir reducir a su mínima expresión.

Ejercicio 1**Resuelve las siguientes operaciones**

1. $\frac{7}{3} - \frac{4}{6} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3} =$
2. $2\frac{2}{5} - 1\frac{3}{7} + 2\frac{3}{14} =$
3. $3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{9} - 1\frac{1}{6} =$
4. $\frac{5}{3} - 1\frac{1}{9} + \frac{4}{6} + \frac{7}{18} =$
5. $4\frac{2}{3} + 6\frac{1}{7} - 3\frac{3}{4} - 5\frac{1}{2} =$
6. $\frac{13}{14} - \frac{1}{12} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} =$

Ejercicio 2**Resuelve los siguientes problemas**

1. Un coche lleva circulando 26 minutos, en los cuales ha recorrido en la primera parte $\frac{1}{5}$ de su recorrido, en la segunda parte $\frac{3}{6}$ de su trayecto. ¿Cuánto tiempo empleará en recorrer todo el trayecto, yendo siempre a la misma velocidad?
2. En una tienda había $15\frac{2}{3}$ metros de cable, se vendieron en el día $2\frac{1}{2}m$, $\frac{3}{4}m$ de metro, $3\frac{1}{4}$, $6\frac{5}{6}m$ y $\frac{1}{2}m$. ¿Cuántos metros de cable quedan en la tienda?
3. De un bote de aceite, cuya capacidad es de $4\frac{1}{2}$ litros, se utilizan en la cocina $\frac{3}{4}$ de litro el lunes, $\frac{1}{6}$ de litro el martes, $\frac{1}{8}$ de litro el miércoles, $1\frac{1}{7}$ de litro el jueves y $\frac{1}{2}$ de litro el viernes ¿Cuánto aceite queda en el bote?

Multiplicación de fracciones comunes

Para multiplicar las fracciones generalizamos como sigue:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$3\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{104}{12} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores como:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2 \times 3 \times 1}{5 \times 2 \times 4} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Se multiplica numerador por numerador} \\ \rightarrow \text{Se multiplica denominador por denominador} \end{array} \right\} \text{Se simplifica}$$

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes multiplicaciones de fracciones comunes:

$$\frac{7}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} =$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{12}{3} =$$

$$3\frac{1}{4} \times \frac{7}{4} =$$

$$4\frac{1}{7} \times 8\frac{2}{9} =$$

$$\frac{9}{5} \times \frac{9}{5} \times \frac{9}{5} =$$

$$\frac{4}{6} \times 2\frac{1}{6} \times \frac{7}{6} =$$

$$\frac{2}{6} \times 5\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{9} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{4} =$$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. ¿Cuántos litros de agua contiene un depósito de 400 litros que está ocupado en sus $\frac{3}{5}$ partes?
2. El peso de un objeto sobre la Luna es de $\frac{1}{6}$ de su peso sobre la Tierra. ¿Cuánto pesa el vehículo Lunar Rover en la Luna, si en la Tierra tiene un peso de 450 libras?
3. Mi mamá con $2\frac{1}{2}$ naranjas hace un vaso de jugo ¿cuántas naranjas necesita para hacer $7\frac{1}{2}$ vasos de jugo?

División de fracciones comunes

Para efectuar una división lo que hacemos es multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{9}{10} \div \frac{2}{8} = \frac{9}{10} \times \frac{8}{2} = \frac{72}{20} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

Inverso
 ↓
 multiplicativo

O bien para dividir una fracción generalizamos de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y el denominador de la primera por el numerador de la segunda

Ejemplo:

$$3\frac{2}{3} \div 2\frac{3}{4} = \frac{11}{3} \div \frac{11}{4} = \frac{44}{33} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Ejercicio 1

$$\frac{6}{14} \div \frac{6}{14} =$$

$$\frac{3}{15} \div \frac{15}{3} =$$

$$\frac{11}{10} \div \frac{9}{4} =$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} \div \frac{1}{4} =$$

$$\frac{9}{10} \div \frac{2}{8} \div 4\frac{1}{3} =$$

$$1\frac{1}{12} \div \frac{3}{10} =$$

$$2\frac{3}{8} \div 5\frac{2}{9} =$$

$$\frac{9}{5} \div \frac{2}{4} =$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} \div \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{6} \div \frac{3}{8} =$$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Un lazo rojo mide $3\frac{3}{4}m$ de largo. Un lazo azul mide $1\frac{1}{4}m$ de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo del lazo azul en el largo del lazo rojo?
2. Luz camina $1\frac{1}{2} km$, Jaime camina $\frac{1}{8} km$. ¿Cuántas veces camina más Luz que Jaime?
3. La señora Olivia cobró en su cremería \$ 76.50 por $12\frac{3}{4} kg$ de crema ¿A cómo dio el kilogramo de crema?

Repaso de adición y sustracción de números decimales

Para sumar o restar decimales, escribimos los números en columna, alineando el punto (quedando enteros con enteros, décimos con décimos centésimos con centésimos etc.); realizando la operación como en los números naturales. En la sustracción cuando el minuendo no tiene el mismo número de dígitos que el sustraendo se sugiere agregar ceros para igualarlos evitando errores al hacer el algoritmo.

Ejemplos

$$45.2 + 26 + 3.872 + 1.3 =$$

$$\begin{array}{r} 45.2 \\ 26. \\ + 3.872 \\ 1.3 \\ \hline 76.372 \end{array}$$

$$43.75 - 17.4854 =$$

$$\begin{array}{r} 43.7500 \\ - 17.4854 \\ \hline 26.2646 \end{array}$$

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes adiciones

$$4.6 + 0.0091 + 57 = \quad 89.8 + 10.0876 + 4.7 =$$

$$\begin{array}{r} 795.98 \\ + 6.0098 \\ + 0.30037 \\ \hline 1008.59001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7.98 \\ + 1975.0098 \\ + 878.865 \\ \hline 1.76598 \end{array}$$

$$7.32 - 3.256 = \quad 989 - 654.8642 =$$

$$\begin{array}{r} 107.2 \\ - 90.80775 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 333.3 \\ - 197.90198 \\ \hline \end{array}$$

$$254.687 + 1.91 + 1 = \quad 27 - 15.78534 =$$

$$\begin{array}{r} 3.2764 \\ + 450.01 \\ + 0.00001 \\ \hline 4.7701 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700.000001 \\ - 99.9998 \\ \hline \end{array}$$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. María Luisa tiene que rodear con encaje tres carpetas, cuyas circunferencias miden respectivamente 60.8 cm, 76.2 cm y 97.5 cm, ¿cuánto encaje en total debe comprar?
2. Alicia compró 0.750 kg de queso rallado y sólo empleó 0.295 kg, ¿cuánto queso quedó?
3. Martha en 7 días compró diario una toronja, los pesos de las 7 toronjas fueron: 0.575 kg, 0.628 kg, 0.425 kg, 0.450 kg, 0.495 kg, 0.533 kg y 0.695 kg. Si las hubiera comprado juntas ¿Cuántos kilogramos habría comprado?
4. Gregorio tiene que mandar a un cliente, 7 000 kg de papa, en cuatro envíos, si el primer envío mandó 2 094.18 kg, en el segundo 1 214.78 kg, en el tercero 1 876.99 kg ¿Cuántos kilogramos de papa quedan para el cuarto envío?
5. Daniel gasta \$ 87.75 en carne, \$ 42.60 en la papelería y \$ 24.80 en la tienda si paga con un billete de \$ 200 ¿Cuánto dinero le queda del billete?
6. En un tambo hay 125 litros de agua. Si se utilizan 89.65 litros, ¿cuántos litros de agua quedan en el tambo?
7. Los cuatro atletas del equipo de relevos de 4 x 100 consiguieron estos tiempos: 12.245, 11.983, 13.028 y 12.524 segundos. ¿Cuál fue el tiempo total del equipo?

Multiplicación de números decimales

En la multiplicación de números decimales debes considerar los números de dígitos que siguen al punto decimal tanto del multiplicando como del multiplicador.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 4.321 \longrightarrow 3 \text{ dígitos después del punto decimal} \\
 \times 0.23 \longrightarrow 2 \text{ dígitos después del punto decimal} \\
 \hline
 12963 \\
 8642 \\
 \hline
 \end{array}$$

5 dígitos después del punto decimal

$$\begin{array}{r}
 .99383 \\
 54321 \\
 \hline
 \end{array}$$

De derecha a izquierda se cuentan 5 dígitos y se coloca el punto decimal

Otro ejemplo es:

$$\begin{array}{r}
 8.9406 \longrightarrow 4 \text{ dígitos después del punto decimal} \\
 \times 2.12 \longrightarrow 2 \text{ dígitos después del punto decimal} \\
 \hline
 178812 \\
 89406 \\
 \hline
 178812 \\
 \hline
 18.954072 \longrightarrow 6 \text{ dígitos después del punto decimal} \\
 \underline{654321}
 \end{array}$$

De derecha a izquierda se cuentan 6 dígitos y se coloca el punto decimal

No se te olvide que, para multiplicar números decimales tienes que hacer la multiplicación como ya lo sabes hacer y luego, debes contar los dígitos que están colocados después del punto decimal en los factores (multiplicando y multiplicador), para separar ese mismo número de dígitos, de derecha a izquierda en el producto con el punto decimal.

Ejercicio 1**Resuelve las siguientes multiplicaciones**

$$\begin{array}{r}
 4.9873 \\
 \times 7.87 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 18.0073 \\
 \times 9.65 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 789.8703 \\
 \times 2.57 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 679.9873 \\
 \times 34.9 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9.97009 \\
 \times 0.876 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 39598 \\
 \times 87.8 \\
 \hline
 \end{array}$$



Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Un trabajador lijó 179 tablas de 37.8 cm cada una ¿Cuántos centímetros lijó en total?
2. Juan compró 97 dulces a \$ 1.75 cada uno ¿Cuánto dinero debe pagar?
3. Fátima ha comprado 3 bandejas de flores. Cada bandeja tiene 3 filas con 3 flores cada una. Si cada flor cuesta \$ 19.75, ¿Cuánto dinero ha pagado en total?
4. Adriana compró 2.5 kg de manzanas a \$ 24.70 el kilogramo ¿Cuánto dinero ha pagado en total?
5. Halla el área de un rectángulo de 26.47 cm de largo y 9.79 cm de ancho.

División de números decimales

Recuerda que en la división de números decimales se pueden presentar tres casos:

- 1) División de un decimal entre un número natural
- 2) División de un número natural entre un número decimal
- 3) División de un número decimal entre un número decimal

Ejemplo de cada caso

Un decimal entre un número natural: recuerda que siempre debes subir el punto decimal del dividendo al cociente.

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) 25.90} \\ \underline{190} \\ 46 \end{array}$$

Ten presente
que siempre debes
subir el punto decimal
al cociente

Un número natural entre un número decimal: el divisor se multiplica por 100 para convertirlo en entero, pero también el dividendo se multiplica por 100 en este caso

$$\begin{array}{r} 0.26 \times 100 \\ \hline 26 \overline{) 526} \\ \underline{526} \\ 00 \end{array}$$

Un número decimal entre otro número decimal: el divisor se multiplica por 100 para convertirlo en entero, pero también el dividendo se multiplica por 100 para que no se altere la división.

$$\begin{array}{r} 0.34 \times 100 \\ \hline 34 \overline{) 246.5} \\ \underline{246} \\ 5 \end{array}$$

Recuerda
que siempre debes
subir el punto
decimal al cociente
cuando se requiera

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes divisiones con números decimales.

$$65 \overline{)93.972} \quad 2.74 \overline{)39.485} \quad 9.87 \overline{)2.3756}$$

$$5.07 \overline{)2.3756} \quad \frac{0.756}{0.001} = \quad \frac{0.876}{0.001} =$$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

- 1) Elsa quiere cortar un listón que mide 6.95 cm en 15 partes iguales ¿Cuánto listón le sobraré?
- 2) ¿Cuál es el número que al multiplicarlo por 2.7 da como producto 214.92?
- 3) Se embotellaron 5 694 litros en botellas de 0.65 litros, ¿Cuántas botellas se llenaron?
- 4) En un zoológico se compraron 342 kilogramos de alpiste para alimentar a las aves. Si el cuidador desea repartirlo en sacos de 2.5 kilogramos. ¿Cuántos sacos tendrá? y ¿Sobra algo de alpiste?
- 5) Susana tiene 70.85 cm de listón y quiere cortarlo en tramos de 5.45 cm, ¿Cuántos tramos le saldrán?

Potenciación

La potenciación es un caso especial de la multiplicación en donde los factores son iguales y sus elementos son:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Exponente} & \\ & \swarrow & \\ \text{base} & \longleftarrow 2^5 = 32 \longrightarrow & \text{potencia} \end{array}$$

La base es el número 2 que se toma como factor, las 5 veces que indica el exponente

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 2 & = & 32 \\ \downarrow & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \text{veces} \end{array}$$

Ejemplos

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

Potencias de 10

Las potencias de 10 se obtienen multiplicando 10 como factor, tantas veces como indica el exponente.

$$\begin{array}{c} \text{Exponente cuatro} \\ \nearrow \\ 10^4 \\ \nwarrow \end{array}$$

base es el número 10 que se toma como factor las 4 veces que indica el exponente

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$\text{Las potencias como } 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Ejemplos

Con exponente positivo

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & \end{array} = 26 \times 10^4$$

conteo de cifras

Con exponente negativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline & & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \end{array} = 15 \times 10^{-6}$$

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes potencias

1) $15^3 =$

2) $8^4 =$

3) $2^7 =$

4) $55^2 =$

5) $2^7 =$

6) $4^2 =$

7) $5^3 =$

8) $11^2 =$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Un terreno de forma cuadrangular mide 36 m de lado ¿ cuántos m^2 tiene de área ? ($A = l^2$)
2. El salón de actos de un centro escolar tiene forma cuadrada. Si su lado mide 11 metros, ¿cuál es su área? ¿Cuánto aumentaría si tuviera 12 metros de lado?
3. Los terrenos de dos parcelas miden 3^8 y 3^4 metros cuadrados, respectivamente. Ángeles duda si la primera parcela es el doble que la segunda o no. De no ser doble, ¿Cuántas veces es mayor la primera de la segunda?
4. Un fabricante de bolígrafos tiene 20 botes de tinta de 20 litros cada uno. ¿Cuántos litros de pintura tiene en total?

Ejercicio 3

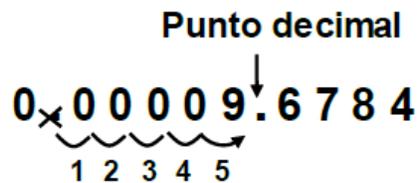
Los siguientes productos de potencias de 10 a qué cantidad corresponden:

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $7.45 \times 10^6 =$ | 2) $8.6 \times 10^2 =$ | 3) $3.5678 \times 10^3 =$ |
| 4) $597.3 \times 10^{-3} =$ | 5) $35.786 \times 10^4 =$ | 6) $2\,564.2 \times 10^{-2} =$ |
| 6) $18.5 \times 10^7 =$ | 8) $400\,000 \times 10^2 =$ | 9) $18.000789 \times 10^8 =$ |
| 10) $982\,654 \times 10^{-6} =$ | 11) $1\,326 \times 10^{-5} =$ | 12) $267\,611.6 \times 10^{-4} =$ |

Otro ejemplo:
0.000096784 cm

En éste caso, el procedimiento será de la siguiente manera:

1. Primero se desplaza el punto decimal de derecha a izquierda, hasta llegar al primer número diferente de cero (en éste caso 9).
2. Separamos el número seguido con el punto decimales y se multiplica por 10 como base.
3. La potencia, a diferencia del primer ejemplo, será negativa ya que contamos de izquierda a derecha, tomando en cuenta únicamente los números enteros.



Ahora tenemos como respuesta lo siguiente, pero observa que se movió el punto decimal a la derecha por tanto el exponente de 10 va a ser negativo.

 9.6784×10^{-5} cm
Nota importante:

Siempre que movemos el punto decimal hacia la **derecha** el exponente de la potencia de 10 será **negativo**

Ejercicio

Escribe en la columna la notación científica de los números de la izquierda.

Medida de	Número escrito en notación decimal	Notación científica
Masa de la Tierra	5 983 000 000 000 000 000 000 000 kg	
Diámetro del Sol	1 391 000 km	
Tamaño de un microbio	0.000004 cm	
Tamaño de un virus	0.00000002 cm	
Diámetro de Júpiter	144 000 000 m	
Tamaño de una bacteria	0.0000002 mm	
Diámetro del ADN	0.0000000002 mm	
Radio Ecuatorial de la Tierra	6 370 000 m	
Tamaño de los glóbulos rojos	0.0000075 mm	

Operaciones con notación científica

Si hay que sumar o restar medidas expresadas en notación científica, y éstas tienen el mismo exponente, simplemente se suman o restan según sea el caso los números decimales y se mantiene el exponente de la potencia de 10.

Adición

Ejemplo 1

$$4.5 \times 10^8 + 3.3 \times 10^8$$

$$10^8$$

$$4.5 \times 10^8 + 3.3 \times 10^8 = 7.8 \times 10^8$$

$$4.5 + 3.3 = 7.8$$

$$4.5 \times 10^8 + 3.3 \times 10^8 = 7.8 \times 10^8$$

Ejemplo 2

$$6.7 \times 10^{-5} + 1.2 \times 10^{-5}$$

$$10^{-5}$$

$$6.7 \times 10^{-5} + 1.2 \times 10^{-5} = 7.9 \times 10^{-5}$$

$$6.7 + 1.2 = 7.9$$

$$6.7 \times 10^{-5} + 1.2 \times 10^{-5} = 7.9 \times 10^{-5}$$

Sustracción

Ejemplo 1

$$8.1 \times 10^6 - 4.2 \times 10^6$$

$$10^6$$

$$8.1 \times 10^6 - 4.2 \times 10^6 = 3.9 \times 10^6$$

$$8.1 - 4.2 = 3.9$$

$$8.1 \times 10^6 - 4.2 \times 10^6 = 3.9 \times 10^6$$

Ejemplo 2

$$6.2 \times 10^{-3} - 2.8 \times 10^{-3}$$

$$10^{-3}$$

$$6.2 \times 10^{-3} - 2.8 \times 10^{-3} = 3.4 \times 10^{-3}$$

$$6.2 - 2.8 = 3.4$$

$$6.2 \times 10^{-3} - 2.8 \times 10^{-3} = 3.4 \times 10^{-3}$$

Para multiplicar o dividir números expresados en notación científica se multiplican o dividen según sea el caso los números decimales y se coloca el diez con la suma o diferencia de los exponentes. Si es multiplicación se suman los exponentes de las potencias de 10 y si se divide se restan los exponentes de las potencias de 10.

Multiplicación

Recuerda que se suman los exponentes de las potencias de 10

Ejemplo 1

$$(1.5 \times 10^7) (4.2 \times 10^4)$$

$$10^{7+4}$$

$$1.5 \times 10^7 \times 4.2 \times 10^4 = 6.3 \times 10^{11}$$

$$1.5 \times 4.2 = 6.3$$

$$(1.5 \times 10^7) (4.2 \times 10^4) = 6.3 \times 10^{11}$$

Ejemplo 2

$$(3.4 \times 10^{-6}) (3.5 \times 10^{-3})$$

$$10^{-6-3}$$

$$3.4 \times 10^{-6} \times 3.5 \times 10^{-3} = 11.9 \times 10^{-9}$$

$$3.4 \times 3.5 = 11.9$$

$$(3.4 \times 10^{-6}) (3.5 \times 10^{-3}) = 11.9 \times 10^{-9}$$

División

Hay dos maneras de dividir.

Ejemplo de la primera manera

Se descomponen en factores las potencias de 10 y se eliminan

$$\frac{6.4 \times 10^7}{3.5 \times 10^3}$$

7 veces

$$\frac{6.4 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{3.5 \times 10 \times 10 \times 10}$$

3 veces

$$\frac{6.4 \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{3.5 \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10}}$$

$$\frac{6.4 \times 10^7}{3.5 \times 10^3} = 1.8 \times 10^4$$

Ejemplo de la segunda manera

Recuerda que se restan los exponentes de las potencias de 10 (exponente del dividendo menos el exponente del divisor)

$$4.9 \div 1.4 = 3.5$$

$$\frac{4.9 \times 10^{-3}}{1.4 \times 10^{-6}}$$

$$10^{-3 - (-6)} = -3 + 6 = 3$$

$$\frac{4.9 \times 10^{-3}}{1.4 \times 10^{-6}} = 3.5 \times 10^3$$

Ejercicio 1**Resuelve las siguientes operaciones con expresiones en notación científica**

a) $3.1 \times 10^4 + 3.2 \times 10^4 =$

b) $8.3 \times 10^8 + 2.7 \times 10^8 + 7.4 \times 10^8 =$

c) $7.9 \times 10^3 + 1.5 \times 10^3 + 1.5 \times 10^3 =$

d) $5.1 \times 10^9 - 2.7 \times 10^9 =$

e) $7.8 \times 10^5 - 5.97 \times 10^5 =$

f) $5.1 \times 10^9 - 2.7 \times 10^9 =$

g) $1.6 \times 10^2 + 8.6 \times 10^2 - 2.5 \times 10^2 =$

h) $8.2 \times 10^5 + 3.5 \times 10^5 - 6.7 \times 10^5 =$

i) $2.2 \times 10^4 + 6.6 \times 10^4 - 3.5 \times 10^4 =$

j) $7.8 \times 10^6 - 2.9 \times 10^6 + 8.3 \times 10^6 =$

k) $3.8 \times 10^2 - 1.5 \times 10^2 + 6.4 \times 10^2 =$

l) $6.5 \times 10^7 - 3.2 \times 10^7 + 9.2 \times 10^7 =$

m) $(9.3 \times 10^3) (2.5 \times 10^9) =$

n) $(2.9 \times 10^5) (7.6 \times 10^2) =$

o) $(4.1 \times 10^4) (9.53 \times 10^4) =$

p) $\frac{3.4 \times 10^{10}}{2.1 \times 10^3} =$

q) $\frac{5.1 \times 10^5}{2.9 \times 10^2} =$

r) $\frac{5.1 \times 10^5}{2.9 \times 10^2} =$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. La masa del Sol es, aproximadamente de **33 000 veces** la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra es de **$6 \times 10^{24} \text{ kg}$** , ¿Calcula la masa del Sol ?
2. La Tierra tiene una masa aproximada de **$6 \times 10^{24} \text{ kg}$** , sabiendo que la densidad media es de **$5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$** , calcula el volumen de la tierra.

Nota:

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

Se despeja y queda

$$\text{volumen} = \frac{\text{masa}}{\text{densidad}}$$

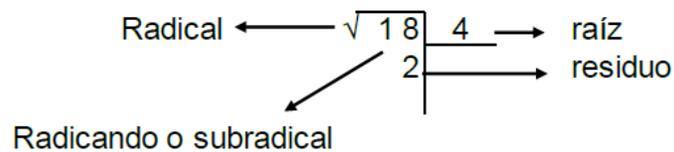
3. La masa de un virus del **tipo A** es de **$2.8 \times 10^{-18} \text{ kg}$** , mientras que la de otro virus del **tipo B** es de **$4.7 \times 10^{-20} \text{ kg}$** . ¿Cuánto pesarán 123 000 virus del tipo A? y ¿64 000 virus del tipo B?
4. El Sol es una estrella cuyo diámetro mide **109 veces** el diámetro de la Tierra. ¿Cuánto mide el diámetro del Sol si el de la Tierra mide **12.756 km**?
5. En **18 g** de agua hay **6.02×10^{23} moléculas**. ¿Cuál es la masa en gramos de **una molécula** de agua?
6. La dosis de una vacuna es de **0.05 cm^3** . Si la vacuna tiene cien **millones de bacterias** por centímetro cúbico, ¿Cuántas bacterias habrá en una dosis?
7. Si la velocidad de crecimiento del cabello humano es **$1.6 \times 10^{-8} \text{ km/h}$** , ¿Cuántos centímetros crece el cabello en un mes? ¿Y en un año?
8. Un satélite gira en una órbita circular de **820 000 km** sobre la superficie terrestre. Expresa esta cantidad en notación científica. Y otro su órbita circular es de **$9.8 \times 10^5 \text{ km}$** sobre la superficie terrestre. ¿Cuál es la diferencia de una órbita de un satélite y el otro?
9. El tamaño de un virus es de **0.00000002 cm** ¿Expresa en notación científica esa cantidad?
10. La masa de un protón es de aproximadamente de **$1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$** unas **1 836 veces** la masa de un electrón. Con estos datos puedes calcular la masa aproximada de un electrón.



11. El planeta Mercurio está a una distancia aproximada del Sol de 3.6×10^7 millas, mientras que Venus está a una distancia aproximada de 6.7×10^7 millas. ¿Cuál es la suma de las dos distancias? Y ¿Cuánto tiempo tardaría una nave espacial que viaja a 1.5×10^3 millas por hora promedio, trasladarse de Mercurio a Venus?
12. Una molécula de hidrógeno pesa 3.3×10^{-24} g. ¿Cuánto pesarán 7 moléculas de hidrógeno?

Raíz cuadrada

La raíz cuadrada de un número es la operación que consiste en hallar un número que al multiplicarlo por sí mismo su producto sea igual o se aproxime al radicando, sus elementos son:



Para sacar raíz cuadrada a un número:

1° Se divide el radicando o sub-radical en períodos de dos en dos de derecha a izquierda:

$$\sqrt{625}$$

2° Se busca un número que multiplicado por si mismo, dé el número del primer período o se acerque a él, en éste caso es 2, porque $2 \times 2 = 4$, 2 va a ser el primer número de la raíz, porque $3 \times 3 = 9$ se pasa:

$$\sqrt{625} \begin{array}{l} 2 \\ \hline \end{array}$$

3° Se resta el cuadrado de 2 a 6, que es el primer período:

$$\begin{array}{r} \sqrt{625} \begin{array}{l} 2 \\ \hline \end{array} \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

4° Se baja el siguiente período que es 25 y éste junto con la diferencia da el número 225:

$$\begin{array}{r} \sqrt{625} \begin{array}{l} 2 \\ \hline \end{array} \\ \underline{4} \\ 225 \end{array}$$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Camilita tiene una cartulina de forma cuadrada, la superficie de la cartulina es $1\ 024\text{ cm}^2$, ¿Cuántos centímetros mide cada lado de la cartulina?
2. ¿Cuál es el cuadrado mayor que se puede formar con 30 000 fichas iguales?, ¿Cuántas fichas sobran? y ¿Cuántas fichas más serán necesarias para obtener el cuadrado inmediato superior?

Adición de números con signo

Los números con signo se utilizan para expresar diferentes cantidades, es común encontrar estos números en conceptos como la temperatura, la medición de las alturas y las depresiones, las pérdidas y las ganancias etc. Siempre que se utilizan números con signo debe tomarse en cuenta que el signo antecede al número y que si éste no está escrito es que es positivo, el signo negativo no debe omitirse en ninguna de las situaciones.

En la adición de **números con signos iguales** se suman los valores absolutos y se conserva el signo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 2 + 6 = 8 \quad \text{Recuerda que cuando no veas un signo éste será positivo} \\ - 3 - 2 - 4 = - 9 \end{array}$$

En la adición de **números con signos diferentes** se restan los valores absolutos y el resultado se escribe con el signo del mayor valor absoluto.

Ejemplo:

$- 5 + 7 = + 2$	$- 12 + 2 = - 10$	$8 - 5 = 3$	$7 - 15 = - 8$
↓	↓	↓	↓
Mayor valor absoluto	Mayor valor absoluto	Mayor valor absoluto	Mayor valor absoluto
+	-	+	-

Si en la expresión se presentan **más de dos números positivos y negativos**, se deben agrupar los positivos y los negativos por separado y sumarlos, posteriormente deberás sumarlos como en los ejemplos anteriores.

Ejemplo:

$$5 + 6 - 3 - 8 + 4 - 9 =$$

La suma de los positivos es: $+ 5 + 6 + 4 = + 15$

La suma de los negativos es: $- 3 - 8 - 9 = - 20$

Entonces $+ 15 - 20 = - 5$

El resultado es: $- 5$

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes operaciones subrayando el número entero con mayor valor absoluto y contesta lo que se te pide:

a) $-9 + 4 =$

e) $-2 + 5 =$

i) $8 - 5 =$

m) $-9 + 5 =$

b) $-3 + 6 =$

f) $8 - 10 =$

j) $3 - 7 =$

n) $22 - 9 =$

c) $6 - 7 =$

g) $-1 + 5 =$

k) $-6 + 4 =$

ñ) $8 - 2 =$

d) $-8 + 4 =$

h) $-6 + 3 =$

l) $3 - 9 =$

o) $7 - 14 =$

Por qué salen sumas positivas y otras negativas.

Ejercicio 2

Resuelve lo más rápido que puedas las siguientes adiciones:

1) $8 - 9 =$

12) $-8 - 7 - 9 =$

23) $-8 - 7 + 9 - 5 - 1 =$

2) $-8 - 9 =$

13) $9 + 7 + 8 =$

24) $2 - 3 + 4 - 2 + 5 + 1 =$

3) $5 + 9 =$

14) $-7 + 9 - 5 =$

25) $-3 + 2 - 4 - 2 + 1 - 4 =$

4) $-8 - 4 =$

15) $-2 - 2 + 6 =$

26) $-5 - 5 - 7 + 2 + 9 + 2 =$

5) $-9 + 7 =$

16) $6 - 5 - 5 =$

27) $7 + 1 - 6 - 6 + 4 - 3 =$

6) $9 - 5 =$

17) $8 - 4 + 1 =$

28) $6 + 2 - 6 + 5 - 7 - 2 =$

7) $-10 + 10 =$

18) $-8 - 6 - 2 =$

29) $-2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2 - 2 =$

8) $-9 - 7 =$

19) $5 - 3 - 3 =$

30) $-1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 =$

9) $8 - 7 =$

20) $-7 - 1 - 6 =$

31) $-6 + 7 - 4 + 7 + 3 - 7 + 3 =$

10) $-8 + 10 =$

21) $8 - 6 + 1 =$

32) $4 + 5 + 2 + 3 + 1 + 2 =$

11) $-6 + 6 =$

22) $-6 + 6 - 9 =$

33) $-2 - 3 - 5 - 1 - 2 - 3 - 4 =$

Sustracción de números con signo

Para resolver sustracciones de números con signo se deben aplicar las reglas de la adición de números con signo que viste anteriormente, después se debe cambiar de signo al sustraendo (lo que está escrito dentro del paréntesis).

Ejemplos:

Recuerda que cuando no se vea el signo éste es positivo

$$23 - (-15) = 23 + 15 = 38$$

$$-35 - (27) = -35 - 27 = -62$$

$$10 - (5) = 10 - 5 = 5$$

$$-18 - (-12) = -18 + 12 = -6$$

Ejercicio 1

Completa esta tabla:

Minuendo	Sustraendo	Sustracción	Resta o diferencia
-1	-5		
7		$7 - (2)$	
-9		$(-9) - (6)$	
	-8	$3 - (-8)$	
	-7	$(-1) - (-7)$	
-6	-11		

Ejercicio 2

Resuelve las siguientes sustracciones:

- a) $(-3) - (8) =$ b) $0 - (1) =$ c) $7 - (4) =$
d) $(2) - (-5) =$ e) $-12 - (-9) =$ f) $6 - (6) =$
g) $(9) - (-10) =$ h) $-6 - (9) =$ i) $9 - (-6) =$
j) $(-6) - (-9) =$ k) $-4 - (-3) =$ l) $(8) - (14) =$
m) $3 - (-3) =$ n) $3 - (7) =$ ñ) $(8) - 14 =$
o) $(9) - (-6) =$ p) $-6 - (-9) =$ q) $-4 - (-3) =$
r) $(-10) - (-4) =$ s) $3 - (-3) =$ t) $-7 - (-3) =$
u) $(-7) - (5) =$ v) $-4 - (-8) =$ w) $(4) - (4) =$
x) $(6) - (-17) =$ y) $(9) - (10) =$ z) $(-6) - (-5) =$

Ejercicio 3

Calcula los términos que faltan y completa estas sustracciones:

- a) $(9) - (\underline{\quad}) = 0$ e) $(-6) - (\underline{\quad}) = -8$
b) $\underline{\quad} - (-8) = -2$ f) $\underline{\quad} - (2) = 7$
c) $\underline{\quad} - (-2) = 4$ g) $\underline{\quad} - (10) = 4$
d) $(-5) - (\underline{\quad}) = -7$ h) $(7) - (\underline{\quad}) = -9$

Ejercicio 4

Relaciona con una línea cada sustracción con su resta o diferencia:

$$5 - (-3) = 4$$

$$8 - (6) = -5$$

$$0 - (-7) = 8$$

$$4 - (6) = -7$$

$$7 - (13) = -2$$

$$-7 - (-2) = -6$$

$$-3 - (4) = 7$$

$$-8 - (-12) = 2$$

Ejercicios de adición y sustracción de números con signo**Ejercicio 1**

Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones:

$$1) 7 - 8 =$$

$$16) (-6) - (-9) =$$

$$2) -6 + 7 - 5 + 2 - 6 =$$

$$17) -7 + 9 =$$

$$3) 7 - (-8) =$$

$$18) 3 - 6 - 9 + 2 - 5 =$$

$$4) (-9) - (6) =$$

$$19) 6 - 28 =$$

$$5) 7 - 5 + 2 - 2 + 3 - 9 =$$

$$20) -12 + 12 - 12 - 12 =$$

$$6) -6 - 7 =$$

$$21) 15 - (25) =$$

$$7) 6 + 7 =$$

$$22) (-7) - (9) =$$

$$8) -4 - (-6) =$$

$$23) 8 + 5 - 9 - 9 =$$

$$9) -10 + 5 - 5 + 2 - 6 - 6 =$$

$$24) -7 - (-9) =$$

$$10) -2 + 6 =$$

$$25) (18) - (45) =$$

$$11) 4 - 6 - 8 + 5 - 3 + 8 =$$

$$26) -75 - (97) =$$

$$12) -8 - 6 - 2 - 5 + 9 =$$

$$27) 6 - 2 + 4 - 5 + 6 - 7 =$$

$$13) 5 + 2 + 5 + 6 + 4 - 9 =$$

$$28) 5 - 4 + 1 - 5 + 4 - 7 =$$

$$14) -10 + 12 - 12 + 24 =$$

$$29) 8 - (-10) =$$

$$15) -25 + 54 =$$

$$30) (-45) - (-18) =$$

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Leo debe \$ 15, si su madre le da \$ 50 de domingo y se gasta con sus amigos \$ 20, ¿cuánto dinero le queda? ¿Tendrá pendiente alguna deuda?
2. Si te estacionas en el tercer sótano y subes 7 plantas, ¿a qué piso llegas? ¿Y si subes 2 plantas desde el tercer sótano?
3. El termómetro marca una temperatura de -2 grados a las 7 de la mañana. A las 3 de la tarde la temperatura ha subido 18 grados. ¿Qué temperatura señala el termómetro a las 3 de la tarde?
4. Laura visita un gran rascacielos. Entra al ascensor y sube desde el cuarto sótano 17 pisos. Después sube otros 8 y, por último, vuelve a subir 7 pisos más. ¿En qué piso se para el ascensor definitivamente?
5. Los trabajadores de una mina se encuentran a 20 metros bajo tierra. Si excavan 3 metros y desde allí suben otros 8 metros para coger una carretilla, ¿a qué altura estaba la carretilla?
6. Juan debe 417 pesos y paga por adelantado de su deuda \$85. ¿Cuánto seguirá debiendo?
7. Si una persona tiene \$ 1 270 en el banco y le presentan para cobrar una factura de \$ 2 920, ¿en qué situación queda su cuenta bancaria?
8. Un equipo de fútbol ha subido 6 posiciones; después, ha bajado 5; más tarde, ha bajado 3, y finalmente, ha subido 4. Indica mediante operaciones con números enteros las situaciones por las que ha pasado el equipo y su posición final respecto de la inicial.
9. ¿En qué año te situarías sí, con una máquina del tiempo, retrocedieras 2 500 años?
10. Un alpinista se encuentra en la cima del Popocatepetl cuya altura es de 5 452 metros, desciende 476 metros. Otro alpinista se encuentra al pie del volcán y asciende 892 metros. ¿Cuál es la diferencia entre las alturas a las que se encuentran los dos alpinistas?
11. La Ciudad de México tiene una altitud de 2 303 metros sobre el nivel del mar. Un helicóptero de noticias sobrevuela la ciudad. Sube 193 metros, desciende 24 metros, baja 9 metros y se eleva 38 metros. Después de todos estos movimientos, ¿qué altura tiene sobre el nivel del mar?

12. Si vives en la 8ª planta y bajas 9 pisos, ¿a qué nivel llegas? ¿Y si desde allí bajas 3 pisos más?
13. El termómetro marca una temperatura de + 14 grados a las 11 de la mañana. A las 3 de la madrugada la temperatura ha bajado 18 grados. ¿Qué temperatura señala el termómetro a las 3 de la madrugada?
14. Un tiburón que nada a 15 metros por debajo de la superficie del mar se lanza a pescar un pez y desciende 21 metros persiguiéndolo. ¿A qué profundidad ha llegado?
15. Martha y su madre van de compras. Martha tiene \$ 500 y se quiere comprar unos zapatos que cuestan \$ 360 y una sudadera de \$ 250. ¿Tendrá suficiente dinero para pagarlo todo? ¿Tendrá que pedir prestado a su madre si quiere comprárselo y cuánto necesitará?

Uso de literales en fórmulas geométricas

La matemática, como cualquier ciencia, tiene su lenguaje propio; éste se le llama lenguaje algebraico, el cual utilizamos para escribir las fórmulas que conocemos y establecer los procesos de resolución de los problemas.

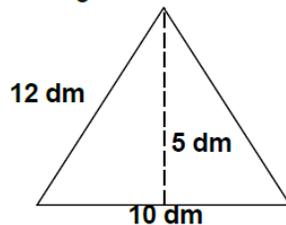
Recuerda que el **área** es la medida de la superficie de una figura; es decir, la medida de su región interior.

Las fórmulas utilizan literales (letras) que pueden sustituirse por valores específicos. Un ejemplo es la fórmula que utilizamos para calcular el área de un triángulo.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

La **b** representa la base del triángulo
h representa la altura
2 es la constante del proceso
A es el área

Si las medidas del triángulo son:



$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \begin{array}{l} b = \text{base} = 10 \text{ dm} \\ h = \text{altura} = 5 \text{ dm} \end{array}$$

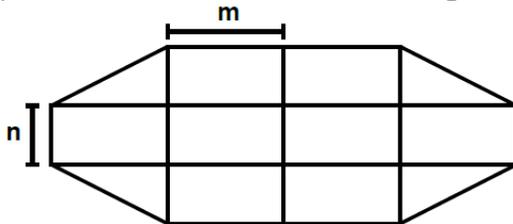
Sólo sustituyes los valores en la fórmula:

$$A = \frac{(10 \text{ dm}) (5 \text{ dm})}{2}$$

$$A = \frac{50 \text{ dm}^2}{2}$$

$$A = 25 \text{ dm}^2$$

O para obtener el área de la siguiente figura



Sabiendo que
m = 8 cm
n = 6 cm

Área de uno de los rectángulos
 $A = bh$
 $A = (8 \text{ cm}) (6 \text{ cm})$
 $A = 48 \text{ cm}^2$

Área (8 rectángulos)
 $A = 8 (48 \text{ cm}^2)$
 $A = 384 \text{ cm}^2$

Área del triángulo
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$
 $A = \frac{(8 \text{ cm}) (6 \text{ cm})}{2}$
 $A = \frac{48 \text{ cm}^2}{2}$
 $A = 24 \text{ cm}^2$

Área (4 triángulos)
 $A = 4 (24 \text{ cm}^2)$
 $A = 96 \text{ cm}^2$

Para obtener finalmente el área de la figura sólo falta sumar las áreas obtenidas

$A =$ áreas de los 8 rectángulos + área de los 4 triángulos

$$A = 384 \text{ cm}^2 + 96 \text{ cm}^2$$

$$A = 480 \text{ cm}^2$$

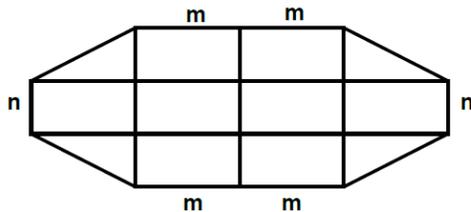


Resultado

El área total de la figura es de 480 cm^2

Recuerda que el **perímetro** es la suma de las medidas de todos los lados de una figura geométrica. Es su contorno.

Ahora si se el perímetro de la figura es de 64 cm ¿Qué medida tiene el lado más largo de cada uno de los triángulo?



Se suman las medidas de los lados de los rectángulos

$$m + m + m + m + n + n \\ 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 6 \text{ cm} \\ 44 \text{ cm}$$

Se resta al perímetro la medida obtenida obtenido

$$64 \text{ cm} - 44 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Se divide la diferencia entre 4 porque son 4 triángulos

$$20 \text{ cm} \div 4 = 5 \text{ cm}$$

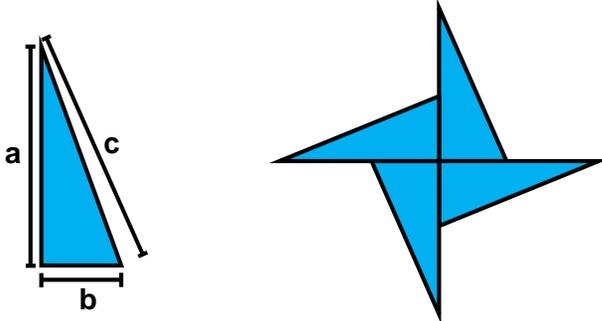
Ejercicio

1. De la siguiente tabla escribe lo que hace falta.

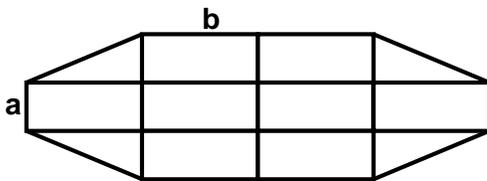
Figura	Como suma	Como producto	Calcula
			$a = 14 \text{ cm}$ $P =$
		$P = 4a$	$a = 48 \text{ cm}$ $P =$
			$a = 15.3 \text{ cm}$ $P =$
			$a = 18 \text{ m}$ $b = 6 \text{ m}$ $c = 24 \text{ m}$ $P =$
	$P = a + a + b + b$		$a = 1.4 \text{ cm}$ $b = 2.7 \text{ cm}$ $P =$
		$P = 2a + b$	$a = 514 \text{ mm}$ $b = 256 \text{ mm}$ $P =$



2. El siguiente reguilete está formado por cuatro triángulos. Si $a=12\text{cm}$, $b=5\text{cm}$. ¿Cuál es el área de uno de los triángulos?, ¿Cuál es el área del reguilete? y ¿Cuál es su perímetro sabiendo que el perímetro de cada uno de los 4 triángulos es 30 cm?



- 3.Cuál es el área de la siguiente figura, si $a = 8\text{ cm}$, $b = 15\text{ cm}$



Lenguaje algebraico

La matemática es un lenguaje y como todo lenguaje, tiene sus reglas, si conoces sus reglas, podrás entender toda la matemática.

Algunas de las situaciones comunes se pueden representar algebraicamente, este lenguaje nos permite plantear y resolver problemas.

Para poder entender la matemática más elemental, debes conocer el significado de algunas palabras como por ejemplo:

Palabra

Suma
Diferencia
Producto
Cociente
Doble, triple,...
Mitad, tercio,...
Raíz cuadrada

Significa

resultado de una adición
resultado de una sustracción
resultado de una multiplicación
resultado de una división
multiplicar por 2, 3, etc.
dividir entre 2, 3, etc.
calcular raíz cuadrada

Ejemplo:

El cociente de dos números aumentado en 2

Se observa que cociente es división, dos números, pueden ser cualquier letra del alfabeto y aumentado es una suma, por tanto: $\frac{x}{y} + 2$

Algunos ejemplos son:

Un número cualquiera se puede denominar con cualquier letra del alfabeto, por ejemplo:

a = un número cualquiera

m = un número cualquiera

q = un número cualquiera y así sucesivamente.

La suma de dos números cualesquiera: **x + y**

La diferencia de dos números cualesquiera: **a - b**

La suma de dos números cualesquiera menos otro número: **r + s - t**

El producto de dos números cualesquiera: **gh**

El doble de un número cualquiera: **2a**

El cociente de dos números cualesquiera (la división de dos números cualesquiera): $\frac{d}{m}$

Ejercicio 1

Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

1. El consecutivo de un número _____
2. La semisuma de dos números cualesquiera _____
3. El doble del cuadrado de un número _____
4. La diferencia entre dos números _____
5. El cociente de dos números cualesquiera _____
6. Un número elevado al cubo _____
7. El producto de tres números cualesquiera _____
8. La diferencia entre un número cualquiera y cinco _____
9. El cociente del triple de un número y el doble de otro _____
10. El área de un cuadrado, siendo que sus lados miden x _____
11. El doble de un número: _____
12. El doble del precio de un artículo: _____
13. El precio de un artículo más \$ 100: _____
14. Una distancia más 100 kilómetros: _____
15. Una distancia menos 100 kilómetros: _____
16. El perímetro de un triángulo equilátero de lado **x** _____
17. El perímetro de un rectángulo de base **x** cuya altura mide 1 cm menos que su base _____
18. El área de un rectángulo de base **x** cuya altura mide 6 cm más que su base _____

Ejercicio 2

Expresa algebraicamente la edad de cada uno de mis familiares sabiendo que:

1. Mi edad es x años
2. Mi padre tiene 28 años más que yo _____
3. Mi madre tiene un año menos que mi padre _____
4. Le saco dos años a mi hermano _____
5. Soy un año más joven que mi hermana _____

Ecuaciones de primer grado

Se denomina ecuación a la igualdad condicionada por el valor de una incógnita. La incógnita es la literal que representa una cantidad desconocida. Toda ecuación de primer grado se representa gráficamente mediante una recta. Toda ecuación consta: $x + 1 = 12$

$$\begin{array}{ccccc} x + 1 & = & 12 \\ \text{Primer miembro} & \text{signo de igual} & \text{segundo miembro} \end{array}$$

Para resolver una ecuación de primer grado es necesario aplicar las propiedades de la igualdad, a este procedimiento se le conoce con otros nombres como despeje o transposición (operaciones inversas), el cual consiste en que todo número o expresión que cambie de miembro cambia por la operación contraria a la que esté planteada.

Ejemplos para resolver las siguientes ecuaciones se va a aplicar las propiedades de la igualdad y la transposición:

1) Ecuación

Para dejar sola a la incógnita se aplica la **propiedad de la igualdad**

$$\begin{array}{r} 8 + x = 5 \\ \cancel{8} + x - \cancel{8} = 5 - 8 \\ \phantom{\cancel{8}} + x - \phantom{\cancel{8}} = 5 - 8 \\ x = -3 \end{array}$$

Para comprobar si el resultado es correcto se sustituye por el valor encontrado. Si resulta una igualdad se puede afirmar entonces que la solución es correcta.

$$\begin{array}{r} \text{Si } 8 + x = 5 \\ 8 + (-3) = 5 \\ 8 - 3 = 5 \\ 5 = 5 \end{array}$$

2) Si la ecuación

Se aplica la **propiedad de la igualdad**

Se comprueba

$$\begin{aligned} 7x &= 84 \\ 7x &= 84 \\ \cancel{7}x &= \frac{84}{\cancel{7}} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x &= 84 \\ 7(12) &= 84 \\ 84 &= 84 \end{aligned}$$

3) Si la ecuación es

Se aplica la **propiedad de la igualdad**

Se **transpone (4)**

Se comprueba

$$\begin{aligned} 4x - 6 &= 14 \\ 4x - 6 + 6 &= 14 + 6 \\ 4x &= 20 \\ x &= \frac{20}{4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 6 &= 14 \\ 4(5) - 6 &= 14 \\ 20 - 6 &= 14 \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

4) Si la ecuación es

Se **transpone (- 9)**

Se comprueba

$$\begin{aligned} x - 9 &= 15 \\ x &= 15 + 9 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 9 &= 15 \\ 24 - 9 &= 15 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

5) Si la ecuación es

Se **transpone (- 15)**

Se **transpone (8)**

Se comprueba

$$\begin{aligned} 8x + 15 &= 39 \\ 8x &= 39 - 15 \\ 8x &= 24 \\ x &= \frac{24}{8} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x + 15 &= 39 \\ 8(3) + 15 &= 39 \\ 24 + 15 &= 39 \\ 39 &= 39 \end{aligned}$$

Ejercicio

Resuelve las siguientes ecuaciones puedes aplicar las propiedades de la igualdad o transponer los términos.

1) $x + 10 = 15$	2) $37 + x = 84$	3) $x + 12 = 71$
Comprobación	Comprobación	Comprobación
4) $x - 6 = 8$	5) $19 - x = 2$	6) $x - 76 = 156$
Comprobación	Comprobación	Comprobación
7) $9x = 522$	8) $14x = 224$	9) $21x = 546$
Comprobación	Comprobación	Comprobación

10) $2x + 3 = 47$	11) $18 + 6x = 90$	12) $9x + 17 = 134$
Comprobación	Comprobación	Comprobación
13) $19x - 36 = 97$	14) $8x - 56 = 8$	15) $24x - 5 = 139$
Comprobación	Comprobación	Comprobación

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes problemas, planteando en cada uno una ecuación.

1. Calcula tres números consecutivos sabiendo que su suma es 177.
2. Un equipo de futbol ha jugado 85 partidos, si el número de juegos ganados excede en 25 a los perdidos ¿Cuántos juegos ha ganado?
3. Ocho veces un número disminuido en 145 es 487 ¿Cuál es el número?
4. En un almacén el precio del pantalón es el doble de la camisa, si el precio de las dos prendas es de \$ 1 731 ¿Cuánto cuesta cada prenda?
5. Si a un número se le suma su triple, la suma es 212 ¿Cuál es ese número?

6. Las ventas en un almacén de dos días fueron: el martes el quintuple del lunes ¿Cuál es la venta del lunes, si el total de las ventas de los dos días es de \$ 10 470?
7. El perímetro de un triángulo equilátero es 108 cm ¿Cuánto mide un lado del triángulo?
8. Un cordón de 516 cm se divide en dos partes, de tal forma que la medida de una de ellas es el triple de la medida de la otra. Encuentra la medida de cada parte.
9. Alicia tiene 12 años más que Luisa, si ambas vivieran dentro de 4 años, la edad de Alicia sería el doble de la edad de Luisa. ¿Cuáles son las edades actuales de ambas?
10. Un listón de 63 cm se dividió en tres partes de tal manera que cada parte excede en 1 cm a la anterior. ¿Cuánto mide cada parte del listón?
11. 526 más el cuádruple de un número es igual a 590. ¿Cuál es el número?
12. Halla 2 números consecutivos que al sumarlos den 109.
13. El perímetro de un triángulo equilátero es 126 cm ¿Cuánto mide cada lado?
14. La suma de dos números es 673 si uno de los números es 399. ¿Cuál es el otro número?
15. El perímetro de un cuadrado es 364. ¿Cuánto mide el lado?
16. Alicia le compró a Alma 4 manzanas rojas y jugosas. Si pagó con un billete de \$ 50 y le devolvieron \$ 12.60 ¿Cuánto costó cada manzana?
17. Cuatro veces un número menos 35 da como diferencia 37. ¿Cuál es ese número?
18. La suma de las edades de un padre y su hijo es de 49 años, el padre tiene 25 años más que su hijo, ¿Cuál es la edad actual de cada uno?
19. El perímetro de un triángulo isósceles es de 28 cm si la longitud de sus dos lados iguales es de 19.8 cm ¿Cuánto mide el lado diferente del triángulo?

20. Rocío percibe \$ 1 600 por semana más una comisión de \$ 150 por cada hora extra que trabaja. ¿Cuántas horas extras debe trabajar para ganar un total de \$ 2 500?
21. Un número multiplicado por 37 es igual a 34 965, ¿Cuál es ese número?
22. La suma de dos números es 479, si uno de los números es 363. ¿Cuál es el otro número?
23. Al comprar Pepe en una ocasión 3 litros de leche y pagar con un billete de \$ 20.00, recibió de cambio \$ 13.40. ¿Cuánto costaba cada litro de leche?
24. Si a un número se le suma 20 y se le restan 45, su resultado es 78 ¿Cuál es ese número?
25. Juan compró 45 chocolates para sus compañeros de grupo si pagó con un billete de \$ 500 y le dieron de cambio \$ 117.50, ¿Cuánto costó cada chocolate?
26. Juan pagó en la tintorería por 6 trajes y una camisa \$ 350, si por la camisa paga \$ 20, ¿Cuánto pagó por cada traje?
27. Un grupo de 6 amigas consiguen una tarjeta de descuento para las entradas a cierto cine. Se reúnen y van juntos a ver una película que les interesa mucho. A Lupita le toca hacer la compra de los boletos en la taquilla, donde paga un total de \$ 192. Ahora Lupita debe calcular el costo de la entrada de cada uno de sus amigas para cobrárselas.

Por ejemplo:

La generalización de la siguiente sucesión es:

5, 7, 9, 11, 13,...



Como observas el incremento es 2, por lo que el factor es **2**

Si se multiplica el factor 2 por la primera posición, su producto es 2

Se observa que el primer número de la sucesión es 5 por tanto **faltan 3** para llegar a 5

La **generalización** es **$2n + 3$**

Comprobamos con la primera posición si $2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$

Comprobamos con la tercera posición si $2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$

Al coincidir los números de la sucesión es correcta la generalización obtenida.

Ejercicio

Escribe la generalización de las siguientes sucesiones y el término que ocupa la posición que se te pide:

Núm. Prog.	Sucesión	Generalización	Término	
			Posición	Número
1	3, 9, 15, 21, 27, 33, ...		10 ^a	
2	11, 15, 19, 23, 27, 31, ...		35 ^a	
3	2, 7, 12, 17, 22, 27, ...		11 ^a	
4	2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...		20 ^a	
5	9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...		8 ^a	
6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...		32 ^a	
7	8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, ...		20 ^a	
8	3, 5, 7, 9, 12, 15, 18, ...		100 ^a	
9	4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, ...		57 ^a	
10	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...		19 ^a	
11	7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, ...		71 ^a	

Sucesiones de figuras

Tienes que hacer lo mismo que en las sucesiones numéricas

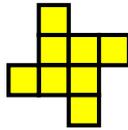
De la siguiente sucesión determina cuántos cuadrados hay en la 5ª figura y escribe su generalización. _____



1º figura

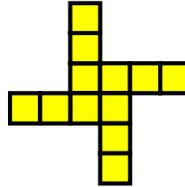
Número de cuadros

4



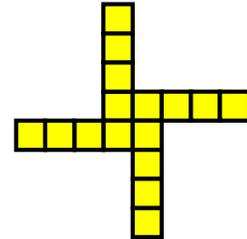
2º figura

8



3º figura

12



4º figura

16

El factor es **4**

Por tanto, la generalización es: **4n**

Ahora comprobemos varias posiciones:

Posición 1ª $4(1) = 4$

Posición 2ª $4(2) = 8$

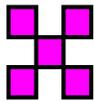
Posición 3ª $4(3) = 12$

Posición 4ª $4(4) = 16$

Observa que es el número de cuadros que tienen cada figura según su posición.

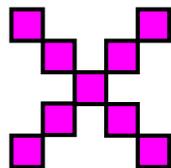
Ejercicio

1.- De la siguiente sucesión determina cuántos cuadrados hay en la 5ª figura y escribe su generalización. _____

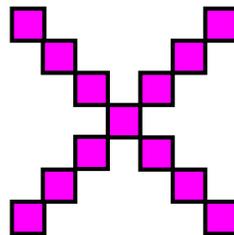


1º figura

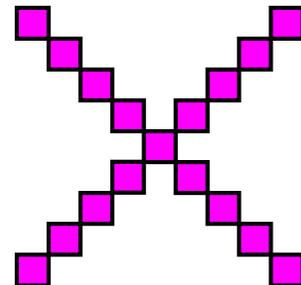
Número de cuadros



2º figura



3º figura



4º figura



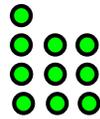
2.- De la siguiente sucesión determina cuántas bolitas hay en la 6ª figura y escribe su generalización.



1° figura



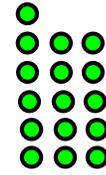
2° figura



3° figura

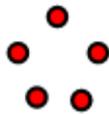


4° figura



5° figura

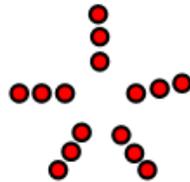
3.- De la siguiente sucesión determina cuántas bolitas hay en la 6ª figura y escribe su generalización.



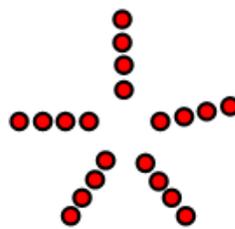
1° figura



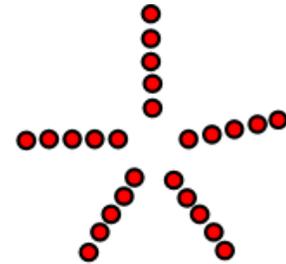
2° figura



3° figura

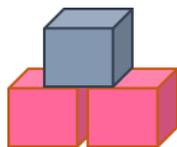


4° figura

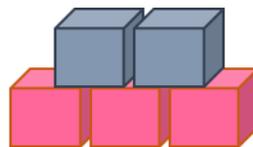


5° figura

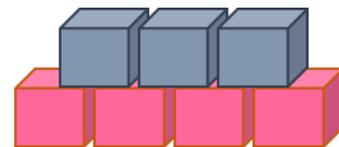
4.- ¿Cuál es la generalización para encontrar el número de cubos que hay en una figura cualquiera de esta sucesión y cuántos cubos tiene la figura de la posición 30ª? _____



1° figura



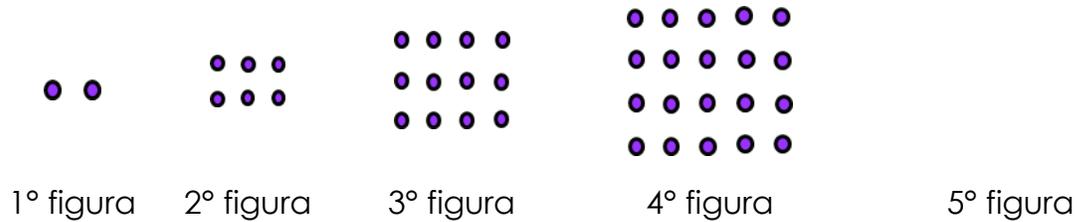
2° figura



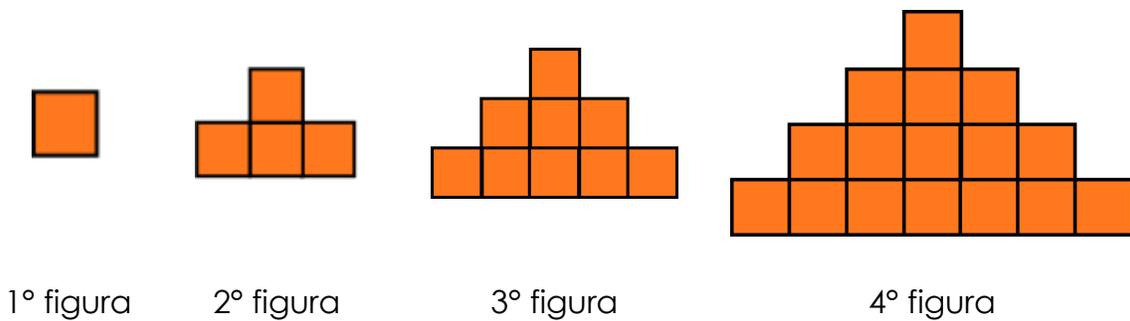
3° figura



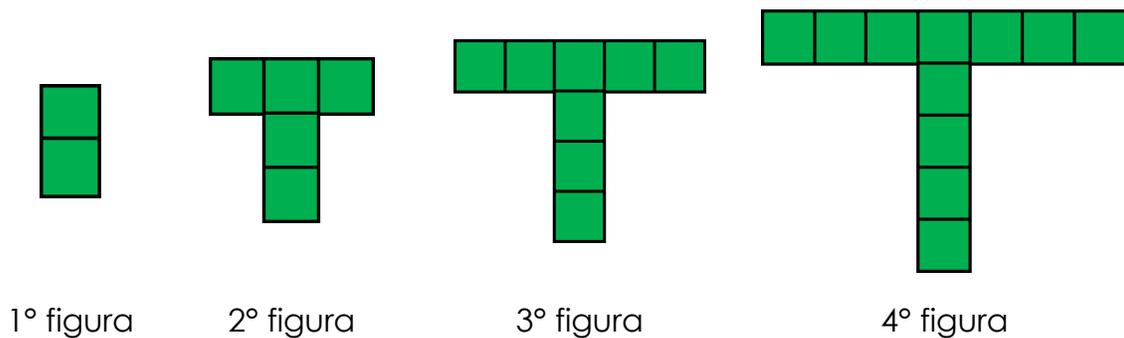
5.- De la siguiente sucesión de figuras determina cuántas bolitas hay en la 5ª figura y escribe su generalización. _____



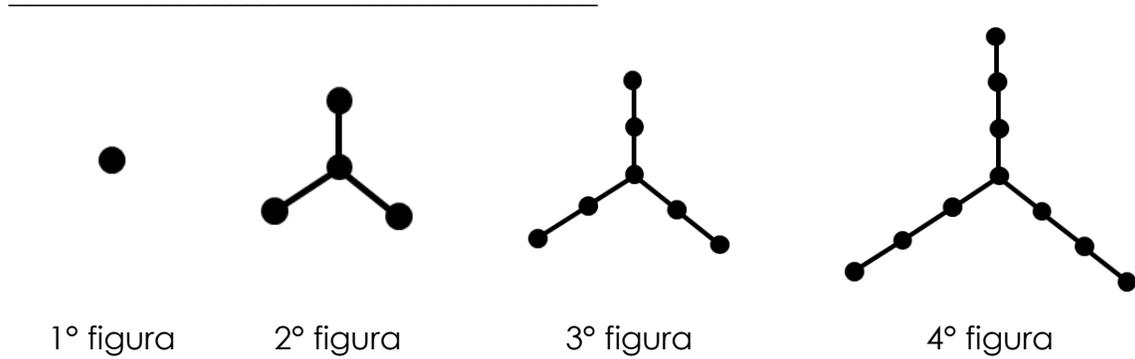
7.- De la siguiente sucesión de figuras determina cuántos cuadrados hay en la 6ª figura y escribe su generalización.



8.- De la siguiente sucesión de figuras determina cuántos cuadrados hay en la 5ª figura y escribe su generalización.



9.- De la siguiente sucesión de figuras determina cuántos puntos hay en la figura que ocupa el lugar 21 y escribe su generalización.



Construcción de sucesiones a partir de una generalización

Cuando se tiene una generalización, sólo tienes que ir substituyendo el valor de **n** por cada una de las posiciones.

Ejemplo:

Generalización	Posición 1ª	Posición 2ª	Posición 3ª	Posición 4ª	Posición 5ª
5n - 2	$5n - 2$				
	$5(1) - 2$	$5(2) - 2$	$5(3) - 2$	$5(4) - 2$	$5(5) - 2$
	$5 - 2$	$10 - 2$	$15 - 2$	$20 - 2$	$25 - 2$
	3	8	13	18	23

Por tanto la sucesión es: **3, 8, 13, 18, 23, ...**

Ejercicio

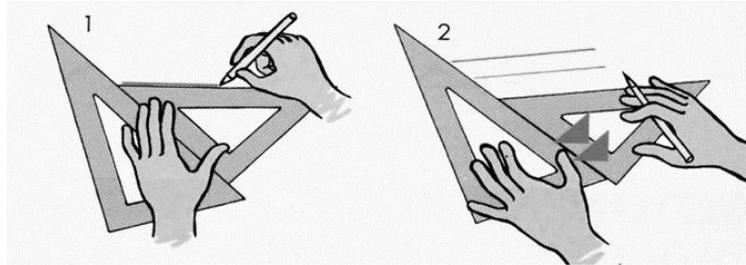
Encuentra los 8 primeros términos de la sucesión de cada una de las siguientes generalizaciones:

Núm. Prog.	Generalización	Sucesión
1	$2n + 5$	
2	$n + 13$	
3	$5n - 2$	
4	$7n + 3$	
5	$20n - 7$	
6	$13n - 1$	
7	$8n - 6$	
8	$4n + 6$	
9	$6n - 3$	
10	$n + 11$	
11	$2n - 1$	
12	$10n + 3$	
13	$3n + 9$	
14	$n + 16$	
15	$7n - 2$	
16	$5n + 4$	
17	$3n$	
18	$4n - 4$	
19	$8n + 9$	
20	$4n - 1$	
21	$2n + 15$	
22	$12n - 6$	
23	$7n + 3$	
24	$5n - 3$	
25	$9n - 2$	
26	$5n + 5$	



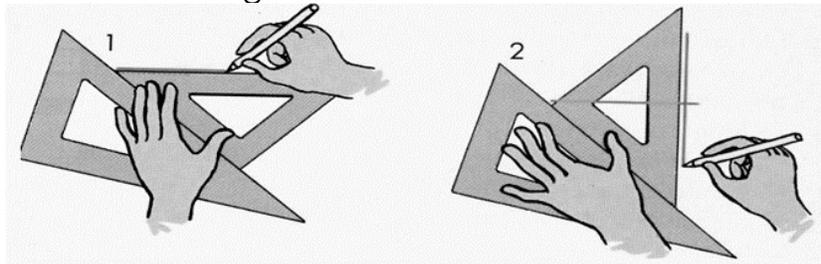
Trazo de paralelas con escuadras

Las rectas o segmentos paralelos siempre están a la misma distancia es decir están equidistantes una de la otra

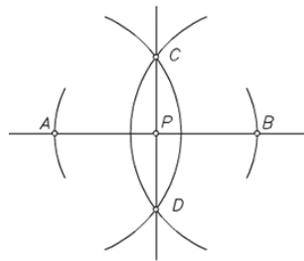


Trazo de perpendiculares con escuadras

Dos rectas o segmentos son perpendiculares cuando al cortarse forman ángulos de 90° es decir ángulos rectos.

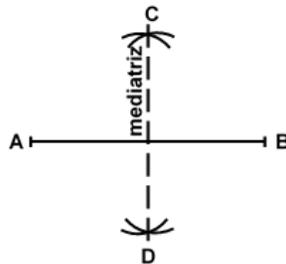


Trazo de perpendiculares con compás y escuadra o regla



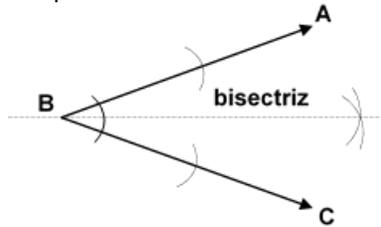
Trazo de una mediatriz

La mediatriz de un segmento es la perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de dicho segmento. La mediatriz de un segmento es el eje de simetría del segmento, es decir todos sus puntos son equidistantes a los extremos del segmento.



Bisectriz de un ángulo

Es la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales pasando por el vértice, es decir es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.



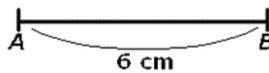
Trazos de triángulos

Conociendo la medida de sus tres lados

Si queremos trazar un triángulo cuyos lados midan, por ejemplo, 6 cm, 5 cm y 4 cm, hemos de seguir estos pasos:

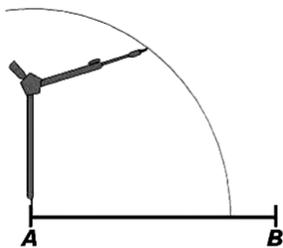
Primer paso

Escogemos el lado mayor de los tres, el de 6 cm, y trazamos con la regla un segmento de esa longitud. En sus extremos rotulamos los puntos A y B:



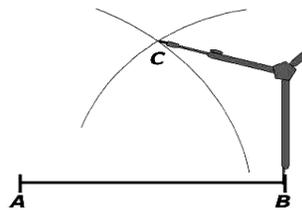
Segundo paso

Ayudándonos de la regla, abrimos el compás de forma que entre una punta y la otra haya 5 cm. Sin cambiarlo de abertura, pinchamos sobre el extremo izquierdo del segmento y trazamos un arco de circunferencia:



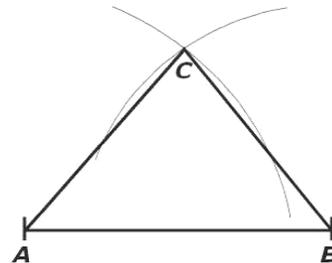
Tercer paso

Usando de nuevo la regla, abrimos el compás de forma que entre una punta y la otra haya 4 cm. Sin cambiarlo de abertura, pinchamos sobre el otro extremo, el derecho del segmento, y trazamos otro arco de circunferencia que cortará al anterior en un punto, que rotulamos como C:



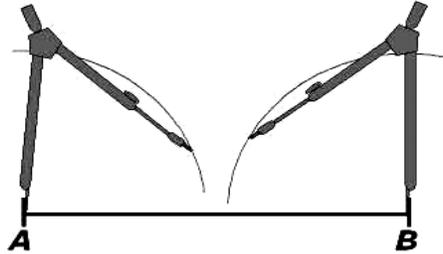
Cuarto paso

Unimos los dos extremos del segmento con el punto de corte, C, y el triángulo queda trazado.



Ahora observa que:

Si intentas construir un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 3 cm y 2 cm comprobarás que los arcos trazados desde los dos extremos del segmento no se cortan: es imposible situar el punto C y por tanto no se puede dibujar el triángulo.



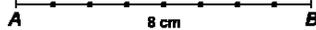
En cualquier triángulo debe cumplirse que cualquiera de sus lados ha de ser menor que la suma de los otros dos. En este último caso, 6 cm no es menor que $3 + 2 = 5 \text{ cm}$ y, por tanto, el triángulo no se puede construir.

Conociendo dos lados y el ángulo que lo forman.

Traza un triángulo donde se conocen dos lados, $c = 8 \text{ cm}$ y $b = 6 \text{ cm}$ y el ángulo que está comprendido entre ellos, $\angle A = 50^\circ$

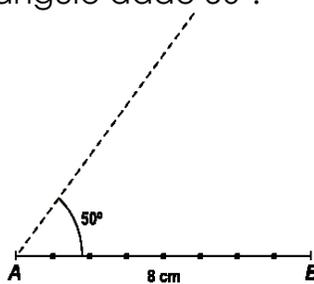
Primer paso

Se traza el segmento AB con una de las medidas dadas 8 cm:



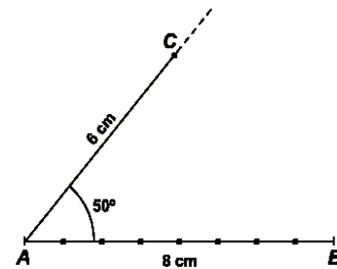
Segundo paso

Se traza en uno de los extremos del segmento AB la medida del ángulo dado 50° :



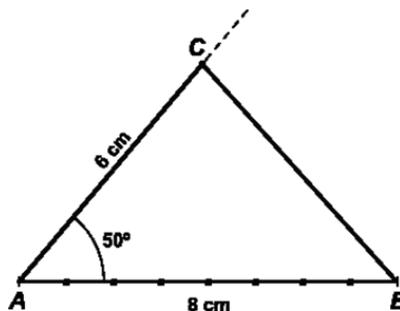
Tercer paso

Se traza el segmento AC de 6 cm, sobre el nuevo lado del ángulo formado



Cuarto paso

Se une C y B, quedando trazado el triángulo pedido.

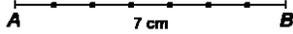


Conociendo un lados y dos ángulos adyacentes.

Traza un triángulo que tenga un lado $c = 7 \text{ cm}$ y dos ángulos adyacentes que midan $\angle A = 30^\circ$ y $\angle B = 70^\circ$

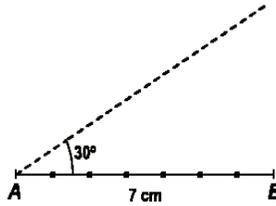
Primer paso

Se traza el segmento AB de 7 cm



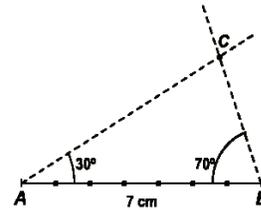
Segundo paso

Se traza en un extremo del segmento AB, la medida de uno de los ángulos dados 30° :



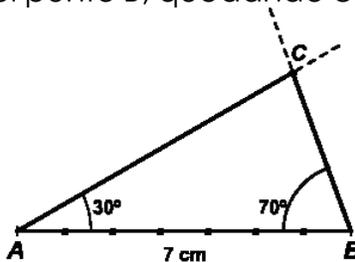
Tercer paso

Se traza en el otro extremo del segmento AB la medida del otro ángulo dado 70° :



Cuarto paso

Se forma el vértice C del triángulo y se trazan los lados de triángulo uniendo C con el punto A y C con el punto B, quedando construido el ángulo pedido.



Ejercicio

Construye un triángulo:

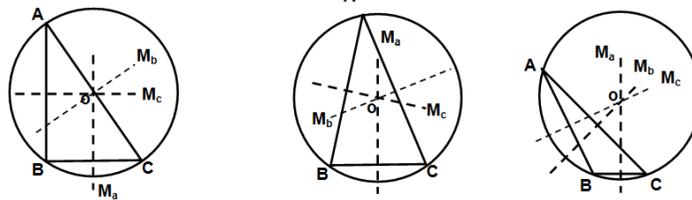
1. con un lado de 9 cm y sus dos ángulos contiguos o adyacentes de 40° y 60°
2. que tenga dos lados de 10 cm y 5 cm, formando ambos un ángulo de 45°
3. de lados: $a = 12 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$ y $c = 9 \text{ cm}$
4. con los siguientes datos: $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $\angle C = 120^\circ$
5. con estos datos: $a = 4 \text{ cm}$, $\angle B = 120^\circ$ y $\angle c = 40^\circ$
6. equilátero de 8 cm de lado

7. que tenga un lado de 5 cm y dos ángulos adyacentes de 120° y 130° , y explica qué es lo que sucede.
8. cuyos lados miden $a = 7$ cm, $b = 4$ cm y $c = 2$ cm, y explica qué es lo que sucede.
9. Isósceles cuyos lados iguales midan 5 cm y forman un ángulo recto.
10. con los siguientes datos $AB = 6$ cm, $\angle A = 57^\circ$ y $\angle B = 73^\circ$

Puntos notables del triángulo

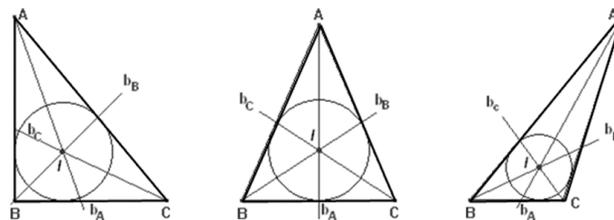
Circuncentro

1. La **mediatriz de un segmento** es la recta perpendicular al segmento en el punto medio.
2. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un **ÚNICO** punto, que denotaremos con **O**, y que recibe el nombre de **CIRCUNCENTRO**.
3. El punto de corte de las tres mediatrices es el CENTRO de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo, que llamaremos **circunferencia circunscrita**.



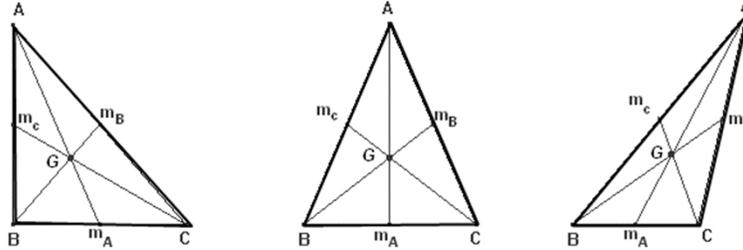
Incentro

1. La **bisectriz de un ángulo** es la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.
2. Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un **ÚNICO** punto, que denotaremos por **I**, y que recibe el nombre de **INCENTRO**.
3. El punto de corte de las tres bisectrices es el CENTRO de una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, que llamaremos **circunferencia inscrita**.

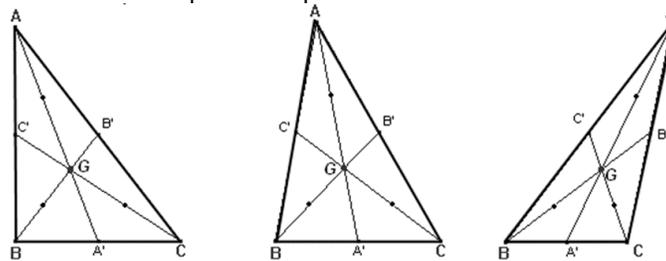


Baricentro

1. Se llama **mediana** de un triángulo al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
2. Las tres medianas de un triángulo, se cortan en un **ÚNICO** punto, que recibe el nombre de **BARICENTRO**, y que denotaremos con **G**.

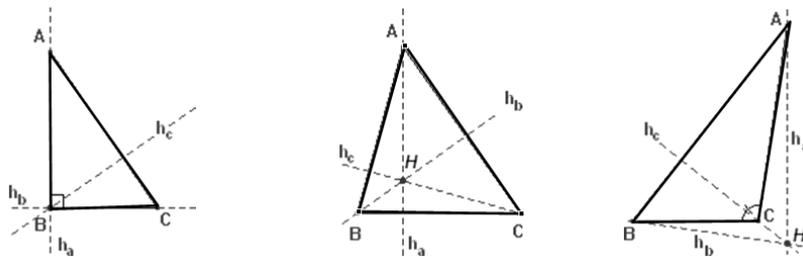


3. El baricentro de un triángulo, es un punto interior al mismo, que dista el doble de cada vértice que del punto medio de su lado opuesto



Ortocentro

1. La altura de un triángulo es el segmento que une un vértice con el lado opuesto o su prolongación formando ángulo recto.
2. Las alturas de cualquier triángulo se cortan en un único punto, que llamaremos **ORTOCENTRO**, y que denotaremos por **H**.



Puedes consultar la siguiente página electrónica:
<http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/trian1.htm>

Ejercicio 1

Marca con una \checkmark el punto que corresponda a la característica descrita

Características	Circuncentro (mediatrices)	Baricentro (medianas)	Ortocentro (alturas)	Incentro (bisectrices)
Las líneas son perpendiculares a los lados del triángulo o a la prolongación de éstos				
Las líneas pasan por un vértice del triángulo				
Las líneas cortan los lados del triángulo en los puntos medios				
Las líneas dividen a la mitad los ángulos del triángulo				
Las líneas se cortan en un punto				
Las líneas son paralelas a los lados del triángulo				
Las líneas cortan los lados del triángulo en una razón de 2 a 1				

Ejercicio 2

Analiza los puntos donde se cortan las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas en un triángulo cualquiera y anota una \checkmark donde se cumplan las características señaladas y una **X** donde no se cumplan.

Características	Circuncentro (mediatrices)	Baricentro (medianas)	Ortocentro (alturas)	Incentro (bisectrices)
Siempre se encuentra en el interior del triángulo				
Se puede localizar en un vértice del triángulo				
Puede localizarse fuera del triángulo				
Es el centro de un círculo que toca los tres vértices de triángulo				
Es el centro de un círculo que toca los tres lados del triángulo				
Es el punto de equilibrio de un triángulo				
Está a la misma distancia de los vértices del triángulo				
Se encuentra alineado con otros puntos notables del triángulo				

Ejercicio 3

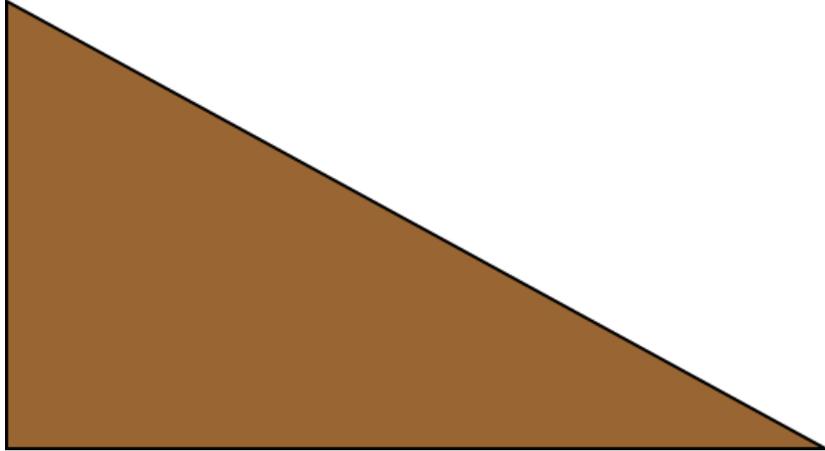
Resuelve los siguientes problemas aplicando las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.

1. En una ciudad pequeña se quiere construir un quiosco que quede a la misma distancia del Palacio Nacional, de la Secretaría de Educación y del Edificio del Congreso, ¿dónde deberán construirlo?





2. Se tiene un terreno de forma triangular y se va a construir en él una fuente circular de tal manera que toque los tres lados del terreno y la parte restante se cubrirá de pasto. Dibuja cómo quedaría la fuente en dicho terreno.



3. ¿Dónde se encuentra el centro de gravedad de estos tres cuerpos celestes de igual masa?

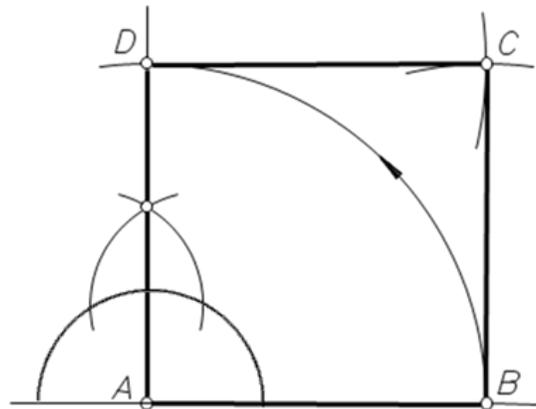


Trazo de cuadriláteros

Hay muchas construcciones de cuadriláteros aquí te mostramos algunas de ellos.

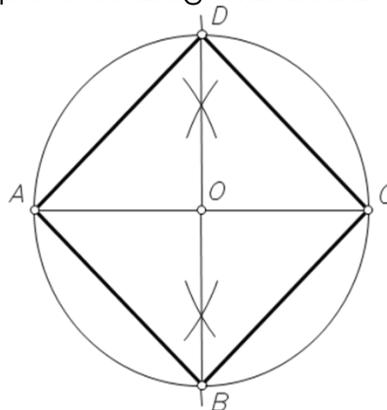
Construcción de un cuadrado conociendo que la medida del lado es de 5cm

1. Sobre una recta se traza el lado $AB = 5 \text{ cm}$
2. Por A se traza la perpendicular
3. Con centro en A y radio AB se dibuja un arco
4. El cuarto vértice se halla trazando arcos de radio AB



Construcción de un cuadrado conociendo su diagonal de 10 cm

1. Se traza una recta que será la diagonal y se mide para que sea de 10 cm
2. Se traza la mediatriz de \overline{AC}
3. Se traza la circunferencia de diámetro \overline{AC}
4. Se trazan los lados del cuadrado en donde se intersectan circunferencia y mediatriz y la recta que es la diagonal dada.

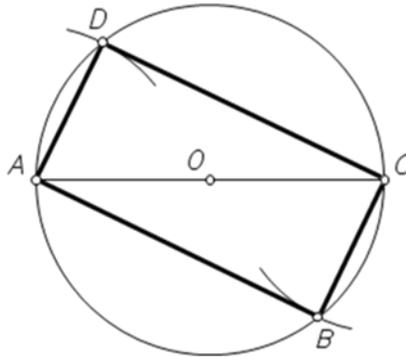


Construcción de rectángulos conociendo sus lados

Se traza igual que el cuadrado pero tomando las medidas del rectángulo.

Construcción de rectángulos conociendo un lado de 10 cm y la diagonal de 12 cm

1. Se traza una recta que será la diagonal y se mide para que sea de 12 cm
2. Se traza la circunferencia de diámetro $AC = 12$ cm
3. Con centro en A y con centro en C y como radio el lado conocido 10 cm se trazan dos arcos que son los otros vértices del rectángulo
4. Por último se trazan los lados del cuadrado en donde se intersectan circunferencia y arcos trazados.

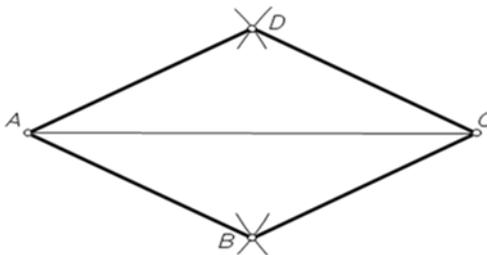


Construcción de rombos conociendo su lado

Se trazan igual que el cuadrado y el rectángulo pero tomando las medidas del lado del rombo.

Construcción de rectángulos conociendo un ángulo de 36° y la diagonal de 10 cm

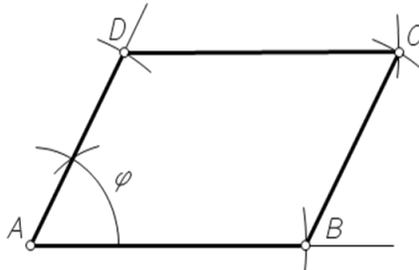
1. Se traza el ángulo dado 36°
2. Se traza la bisectriz del ángulo trazado
3. Sobre la bisectriz se traslada la medida de la diagonal 10 cm
4. Por C se trazan paralelas a los dos lados del ángulo





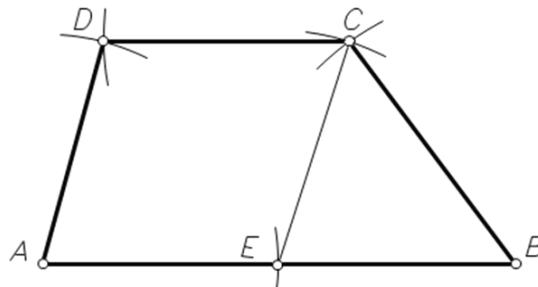
Construcción de romboides conociendo sus lados 4 cm y 7 cm y un ángulo 49°

1. Se traza el ángulo dado 49°
2. Sobre los lados del ángulo se transportan las dimensiones de los lados
3. El cuarto vértice se halla trazando dos arcos de radio igual a los lados



Construcción de un trapecio escaleno conociendo la medida de sus cuatro lados

1. Se traza el primero de los lados \overline{AB}
2. Sobre el segmento \overline{AB} se traslada el lado opuesto \overline{AE}
3. Con centro en E y como radio igual al tercer lado se dibuja un arco
4. Con centro en B y como radio igual al cuarto lado se dibuja un arco
5. Con centro en A y C y radios \overline{EC} y \overline{AE} respectivamente se dibujan dos arcos
6. Por último se unen los puntos de intersección



Ejercicio**Construye un:**

1. Cuadrado de 9 cm lado.
2. Cuadrado de diagonal 5
3. Rombo con una diagonal de 8 cm y por lado de 6 cm
4. Rectángulo de lado 9 cm y 5 cm
5. Rectángulo cuya diagonal mide 9 cm y uno de sus lados 5 cm
6. Rombo de lado 5 cm y uno de sus ángulos de 72°
7. Rombo cuyas diagonales midan 8 cm y 9 cm
8. Cuadrado si la diagonal mide 15 cm
9. Trapecio escaleno cuyos lados paralelos miden 7.5 cm, 3 cm, 3.7 cm y 5.2 cm
10. Rectángulo con diagonal de 5 mm y un lado de 2 mm
11. Rombo cuyo lado mide 3 cm y una diagonal de 5 cm
12. Cuadrado de diagonal de 5 cm
13. Trapecio rectángulo conociendo la base mayor 6 cm

Trazo de polígonos regulares

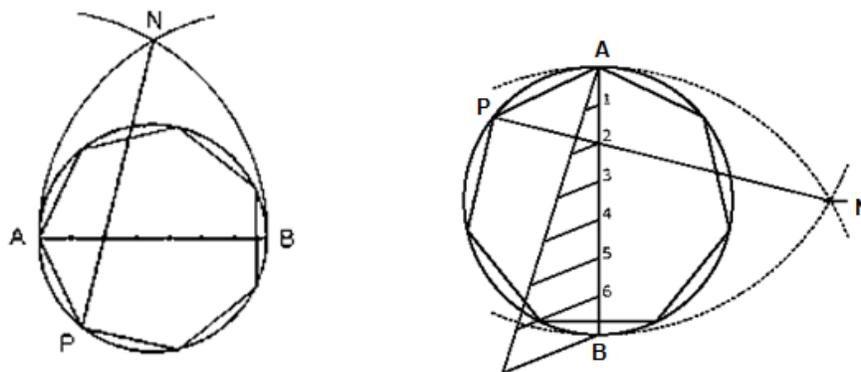
Método de Rinaldini para trazar polígonos

Rinaldini fué un oscuro matemático no demasiado mencionado en los libros de la historia de la Matemáticas. Vivió entre 1615 – 1698 y publicó un número de libros sobre Algebra, Geometría y Matemática general, ninguno de los cuales parece contener avances notables.

No obstante, descubrió una construcción para trazar polígonos. Funciona con cualquier polígono, pero sólo es precisa con algunos casos. La construcción se halla habitualmente en libros para artistas y artesanos.

Vamos a ver ahora el método para un polígono regular de 7 lados es decir un heptágono:

1. Traza un círculo con diámetro \overline{AB} . Divide el diámetro en el mismo número de partes iguales que los lados del polígono que deseas, siete en este caso.
2. Traza un par de arcos de radio \overline{AB} con centros en A y B que intersecten en N;
3. Une N siempre al segundo punto de división y prolonga la línea hasta llegar al círculo en P. La longitud \overline{AP} es el lado del polígono que buscas.
4. Con el compás abierto se toma la medida de los puntos de la circunferencia de A a P, y se sigue marcando en ella los otros puntos del polígono.

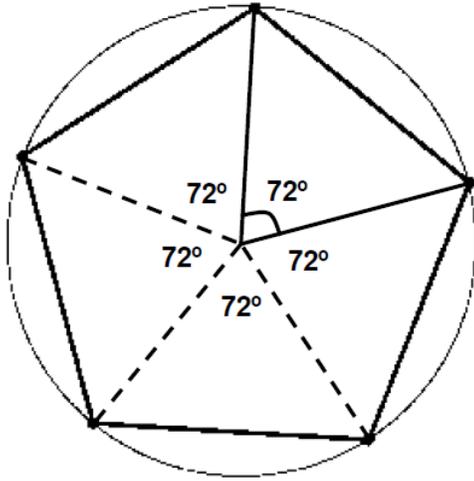




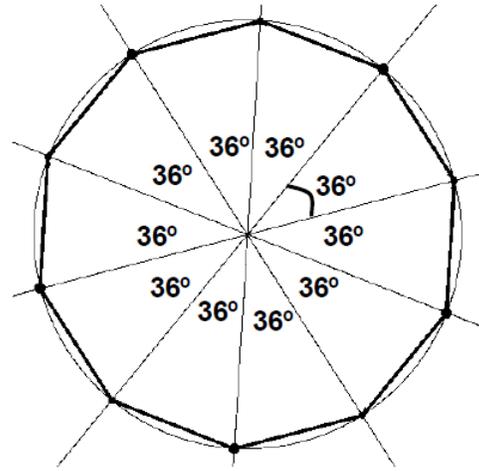
Otro método

Es trazar una circunferencia y dividir 360° entre el número de lados del polígono que quieras trazar y te da el ángulo que se forma con vértice en el centro de la circunferencia y se siguen marcando los ángulos para formar el polígono:

$$360^\circ \div 5 = 72^\circ$$



$$360^\circ \div 10 = 36^\circ$$



Ejercicio

Traza los polígonos regulares que se te piden

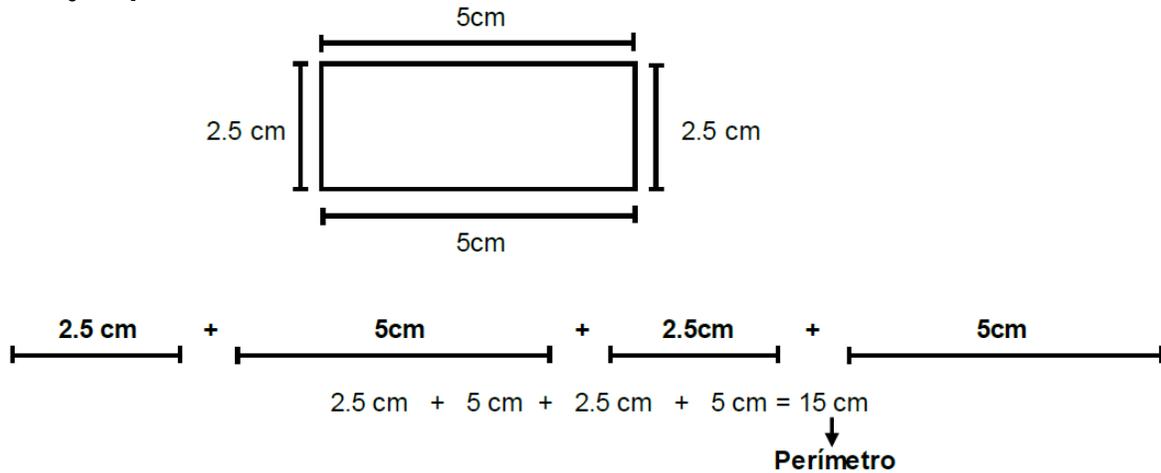
1. Traza un hexágono
2. Traza un octágono
3. Traza un nonágono o eneágono
4. Traza un heptágono

Perímetro y áreas de figuras geométricas

Perímetro

La palabra perímetro significa **peri** = alrededor y **metro** = medida, por tanto, es la medida alrededor. En un polígono el perímetro se obtiene sumando la medida de todos los lados de la figura, o bien si tiene, todos los lados iguales, se toma la medida de uno de ellos y se multiplica por el número de lados, su medida es en unidades lineales.

Un ejemplo:

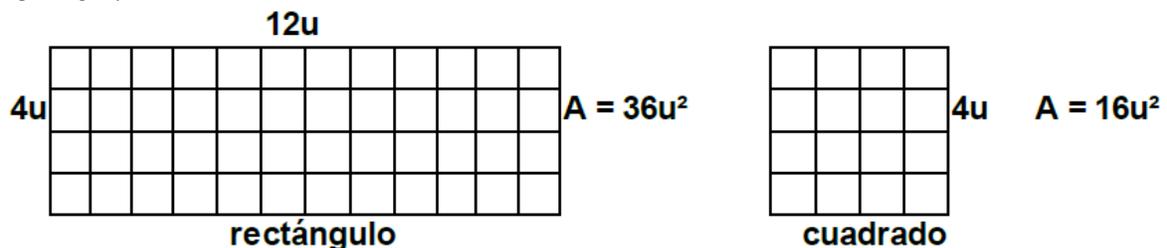


Área

El área de una figura geométrica es todo el espacio que queda encerrado entre los límites de una figura cerrada, medida por el número de unidades cuadradas.

Un ejemplo

Observa las siguientes figuras y cuenta las unidades cuadradas que la forman.



Se multiplica $(12u) (4u) = 48 u^2$

Se multiplica $(4u) (4u) = 16u^2$

Como ves, se obtienen los mismos resultados contando las unidades (cuadros) que multiplicando los números correspondientes a las dimensiones de cada figura.

Así, a la medida horizontal (base, lado o largo) se le multiplica por la medida vertical (altura, lado o ancho) y se obtiene al área de un cuadrilátero, rectángulo o cuadrado; por tanto se dice, que:

$$A = b \times a$$

$$A = \ell \times \ell$$

$$\ell^2$$

Entonces las dimensiones que necesitas para obtener sus áreas son las medidas de:



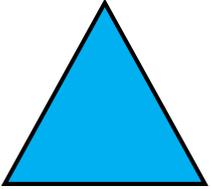
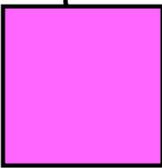
Largo o base

Altura o ancho



Lado

Claro que la situación se puede complicar para reticular (cuadrícula) un triángulo o un círculo; ya que la cuadrícula no se ve entera en algunas partes, por lo que te presenta la siguiente tabla, con las fórmulas para calcular áreas y perímetros de figuras geométricas planas.

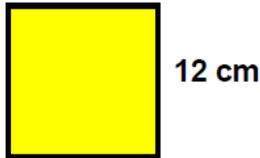
FORMA	ELEMENTOS	FÓRMULA PERÍMETRO	FÓRMULA ÁREA
	b: Base h: Altura ℓ : Lado1 m: Lado2 n: Lado3	$P = \ell + m + n$	$A = \frac{b h}{2}$
	ℓ : Lado	$P = 4 \ell$	$A = \ell^2$
	b: Base h: Altura	$P = 2b + 2h$	$A = b \times h$

	b: Base h: Altura	$P = 2b + 2h$	$A = b \times h$
<p>TRAPECIO</p>	ℓ : Lado1 m: Lado2 n: Lado3 o: Lado4 b: Base menor B: Base mayor h: Altura	$P = \ell + m + n + o$	$A = \frac{h(B + b)}{2}$
	ℓ : Lado D: Diagonal mayor d: Diagonal menor	$P = 4 \ell$	$A = \frac{D d}{2}$
	ℓ : Lado P: Perímetro ap: Apotema	$P = 6 \ell$	$A = \frac{P \text{ ap}}{2}$
	π: 3.1416 d: Diámetro r: Radio	$P = d \times \pi$	$A = \pi \times r^2$

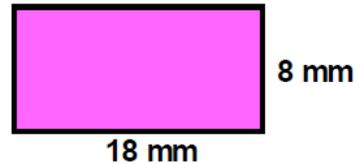
Ejercicio 1

Calcula las áreas y perímetros de las siguientes figuras sustituyendo los valores en las fórmulas correspondientes (fíjate bien en las unidades resultantes).

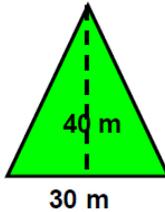
1) Lado = 12 cm



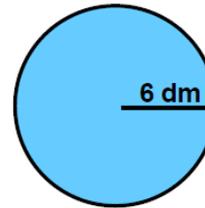
2) Base = 18 mm Altura = 8 mm



3) Base = 30 m Altura = 40 m



4) Radio = 6 dm

**Ejercicio 2**

Resolución de problemas

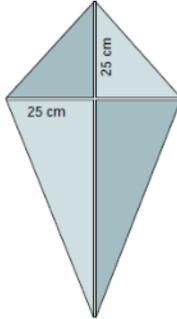
Para darle solución a cualquier problema matemático, debes seguir los pasos que a continuación se exponen y seguramente darás con la respuesta.

1. Lee con atención el problema.
2. Determina qué es lo que se te pide, es decir qué te preguntan.
3. Analiza con qué elementos cuentas para responder (datos).
4. Determina cómo vas a utilizar los datos que tienes.
5. Por último, si llevas a cabo lo que piensas te dará la respuesta, una vez que la tengas, analiza si ésta responde a la pregunta de tu problema. Ten presente que tu resultado no es sólo un número, por tanto no olvides de acompañarlo de las unidades correspondientes (metros, kilómetros, centímetros, milímetros, etc.)

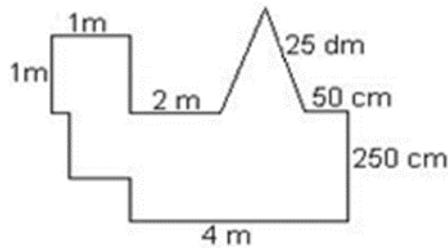
Resuelve los siguientes problemas

1. Clara va a cubrir un muro con 9 baldosas cuadradas que miden 1.25 m por lado, colocándolas de 3 en 3. ¿Cuál es el área del muro de acuerdo con el área total de las 9 baldosas?
2. Si la rueda de una bicicleta recorrió 250 m de distancia y su radio es de 0.34 m, ¿Cuántas vueltas completas dio la rueda aproximadamente?
3. Se requiere pintar una pared que mide de largo 8.32 m y de alto 3.47 m, ¿Cuál es el área de lo que se va a pintar, si hay una puerta rectangular que mide de base 1.50 m y de altura 1.90 m?
4. Si se sabe que el perímetro de un triángulo equilátero es 173.4 cm. ¿Cuánto mide uno de sus lados?
5. Una cometa está construida con dos triángulos unidos por sus bases. El superior es equilátero con un perímetro de 90 cm, y el inferior es isósceles y uno de sus lados iguales mide 40 cm. ¿Cuál será el perímetro de la cometa?
6. El área de un rectángulo es 6 384 decímetros cuadrados. Si la base mide 93 cm, ¿cuánto mide la altura? y ¿cuál es su perímetro?
7. ¿Cuánto costará alambrar una finca cuadrada de 14 metros de lado a razón de \$ 259 el metro de alambrada?
8. Sabiendo que el área de un pentágono es de 120 cm² y que la medida de uno de sus lados es 8 cm ¿Cuál será la medida de su apotema?
9. Halla el perímetro y el área de un rectángulo cuyos lados miden 4.5 m y 7.9 m respectivamente
10. Se ha rodeado con una cuerda un balón de fútbol, cuya medida del trozo de cuerda fue de 94.20 cm de longitud. ¿Cuál es el radio del balón de fútbol?
11. Calcula el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio.
12. Una pizza tiene 24 cm de radio. En la pizzería tienen cajas cuadradas de 25, 30, 45 y 50 cm de lado. ¿En cuál de ellas deben meterla?

13. Calcula en cm^2 la cantidad de papel de seda que se necesita para hacer una cometa formada por dos palos de 75 cm y 50 cm de longitud, de manera que el palo cortó cruce al largo a 25 cm de uno de sus extremos.



14. En el jardín de Manuel se le ha formado un charco como indica la figura. Para evitar que sus hijos lo pisen, va a bardearlo. ¿Cuántos centímetros de barda necesita? Fíjate en las unidades de los lados del jardín unas están en metros, otra en decímetros y otras en centímetros.



15. Lucy quiere forrar una lata de refresco con cartulina. Si la lata tiene un radio de 3 cm y una altura de 11 cm, ¿Cuáles serán las dimensiones que necesitará que tenga la cartulina?
16. Milagros quiere pintar ella misma la sala de su casa. Ha ido a una tienda y ha elegido un color que le ha gustado. Le han dicho que con un litro de esa pintura puede pintar una superficie de 8 m^2 . Milagros ha ido a casa y ha medido las paredes, el techo, las puertas y las ventanas del salón. Todas tienen forma rectangular y las dimensiones son las siguientes:
- PAREDES: 2 paredes de 6 m de largo y 3 m de alto
2 paredes de 4 m de largo y 3 m de alto
 - TECHO: 6 m de largo y 4 m de ancho
 - PUERTA: 1 puerta de 2 m de alto y 1.5 m de ancho
 - VENTANAS: 2 ventanas de 1.5 m de alto y 1 m de ancho
- Calcula cuántos metros cuadrados tiene que pintar Milagros y cuántos botes de pintura debe comprar.

17. Un rectángulo tiene un área de 95 dm^2 y su altura mide 5 dm. Calcula cuánto mide su base.

18. El salón principal de un hotel tiene la forma de un octágono regular con un perímetro de 52 m. ¿Cuánto mide cada lado de dicho salón?
19. La superficie de un romboide es 250 cm^2 y su altura 50 cm. Calcula su base.
20. La superficie de un cuadrado es de $4\,489 \text{ m}^2$. Calcula la longitud de su lado.
21. Anita quiere rodear de encaje fino un espejo circular de 30 cm de radio. En la tienda venden tiras de encaje fino de 18 dm, 17 dm y 19 dm. ¿Cuál crees que debería comprar? Si cada centímetro cuesta \$ 1.5, ¿cuánto dinero le devolverán si paga con un billete de \$ 500?
22. Una piscina tiene forma de decágono regular de 12 m de lado. Si Fermín quiere hacer 3 km andando a su alrededor, ¿cuántas vueltas tendrá que dar a la piscina?
23. Un agricultor tiene una finca de forma rectangular en la que ha sembrado patatas. Sus dimensiones son 200 m de largo y 68 m de ancho. Estima que el metro cuadrado de la finca producirá unos 3.5 kg de patatas. ¿Cuántos kilogramos de patatas recogerá aproximadamente?
24. Un campo cuadrangular de 40 m de lado se va a rodear con una alambrada de tres hilos. Si cada metro de hilo vale \$ 3.75, ¿cuánto costará dicha alambrada?
25. ¿Qué cantidad de papel se necesita para elaborar un periódico mural de forma hexagonal de 32 dm de lado y 22 dm de apotema?
26. En las fiestas de un pueblo han montado una carpa para las verbenas, cuya forma es la de un polígono regular de 11 lados. La carpa está rodeada por una guirnalda con bombillas que tiene una longitud total de 68 m. ¿Cuánto mide el lado de la carpa?

Reparto proporcional

Nada más recuerda qué es una razón y una proporción:

Razón

Es la relación entre dos números, definida como el cociente entre dos números naturales.

El dividendo siempre debe ser diferente de cero.

$$\frac{a}{b}$$

Proporción

Es la igualdad de dos razones equivalentes.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Reparto proporcional

Debemos, en primer lugar, diferenciar entre repartir en partes iguales y repartir en partes proporcionales; por ejemplo si tengo 50 libros y dos grupos de estudiantes, puedo dar a cada grupo 25 libros; en este caso he repartido en partes iguales. Y el **reparto proporcional** no es más que la división equitativa consistente en repartir o dividir cierta cantidad en forma proporcional a determinados factores o números, llamados **índices de reparto**.

Cuando escuchamos la palabra reparto imaginamos una división en partes iguales; sin embargo, no siempre es el caso.

Los problemas de reparto proporcional se pueden plantear de diferentes maneras, determinando el factor de proporcionalidad directa o se puede aplicar directamente la regla de tres, utilizando razones con respecto al total.

Por ejemplo:

Se van a repartir \$ 10 000 entre dos personas en partes iguales, en cuyo caso únicamente hay que dividir \$10 000 entre dos, obteniendo \$ 5 000 para cada una.

Otro caso es cuando se reparten \$ 30 000 entre dos personas en proporción a las edades de las mismas. Por ejemplo, Ricardo tiene 33 años y Raúl 12 años.

La cantidad no se va a dividir en partes iguales entre las dos personas, sino que en este caso se hará una repartición proporcional a las edades de cada una.

Entonces los factores que determinan el reparto son las edades. Estos factores reciben el nombre de **índices de reparto**. En este ejemplo los índices son 33 y 12, que sumados dan 45.

La operación se resuelve al dividir \$ 11 250, cantidad a repartir, entre 45, con lo que se obtiene lo que corresponde a la unidad. El resultado de la operación anterior recibe el nombre de **factor constante**, que a su vez se **multiplica** por los **índices** y de esta manera se determina el cociente de reparto o cantidad que recibe cada uno de los beneficiarios.

Planteamiento:

\$ 11 250 se repartirán
proporcionalmente así:

1ª persona = 33
2ª persona = $\frac{12}{45}$

Por tanto se requiere repartir en **45 partes iguales**

$$\frac{11250}{45} = 250 \qquad 250 \times 33 = 8250 \qquad 250 \times 12 = 3000$$

Entonces la 1ª persona recibirá	\$ 8 250
2ª persona recibirá	<u>\$ 3 000</u>
	<u>\$ 11 250</u>

Resultado

A Ricardo de toca \$ 8 250 y a Raúl \$ 3 000

Ejercicio

1. El abuelito de Juan quiere repartir \$ 450 entre sus tres nietos de 8, 12 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades ¿Cuánto corresponde a cada uno?
2. Tres personas compraron un billete de lotería que resultó premiado con \$ 60 000 La primera aportó \$ 6 para la compra del boleto, la segunda \$ 4 y la tercera \$ 10 .Si se reparten en esa proporción ¿Cuánto dinero le corresponderá a cada persona?
3. Tienes que repartir proporcionalmente \$ 2 400 entre Pablo, Andrea y Gaby de acuerdo con sus edades que son 4, 8 y 12 años respectivamente. ¿Cuánto le corresponde a cada uno de ellos?

4. Los habitantes de tres comunidades zacatecanas harán una obra de pavimentación que beneficiará a todos. El costo de los materiales es de \$ 3 500 000. En la comunidad de La Villa Antigua hay 700 habitantes; en la comunidad Lomas de Patrocinio hay 400 habitantes; y en la comunidad Hidráulica hay 30 habitantes. Si el reparto del costo se hiciera de manera proporcional a la cantidad de habitantes de cada una de las comunidades, ¿cuánto pagaría cada habitante? y ¿Cuánto pagaría cada una de las tres comunidades?
5. Tres trabajadores hicieron una obra por la que se les pagó \$ 11 480 ¿cuánto se dará a cada uno si el primero trabajó 3 días, el segundo 5 días y el tercero el doble del primero?
6. Se tiene una pecera de dimensiones 30 cm de ancho, 60 cm de largo y 45 cm de altura, se construirá otra pecera proporcional a la primera. ¿Cuáles serán las nuevas medidas si el largo deberá medir 150 cm?
7. Los vecinos de tres edificios E1, E2 y E3 deciden construir una piscina en común. El presupuesto de la obra asciende a \$ 1 650 000. En el edificio E1 viven 44 vecinos, en el E2 viven 55 y en el E3 viven 51 vecinos. ¿Cuánto han de aportar a la construcción los vecinos de cada edificio? Y ¿Cuánto dinero aportará cada uno de los vecinos individualmente?
8. Dos albañiles cobraron \$ 3 400 por un trabajo que hicieron conjuntamente. Si el primero trabajó tres jornadas y media y el segundo cinco jornadas. ¿Cuánto dinero cobrará cada uno?
9. Tres socios han obtenido en su negocio la ganancia de \$ 129 000, ¿Qué parte corresponde a cada uno si el primero aportó inicialmente \$ 18 000, el segundo, \$ 15 000 y el tercero \$ 10 000?
10. En un equipo de fútbol los tres mejores goleadores se repartirán un premio de \$ 18 000 de manera proporcional, al número de goles que cada quien anotó en la temporada. Enrique metió 12 goles, Juan 8 goles y Pedro 4 goles. ¿Cuánto dinero le corresponde a Enrique, Juan y Pedro?
11. Dos inversionistas aportaron \$ 45 000 y \$ 55 000 para un negocio, pero hubo una pérdida de \$ 20 000. Si decidieron absorber la pérdida de manera proporcional al dinero invertido, ¿Cuánto dinero le toca perder a cada uno?
12. Tres socios, Antonio, José y Ana pusieron para crear una empresa \$ 50 000, \$ 80 000 y \$ 100 000 respectivamente. El primer mes la empresa tiene \$ 23 000 de beneficios. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

13. Un padre reparte \$ 1 680 en partes proporcionales a las edades de sus hijos, siendo estas 12, 10, y 20 años. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?
14. Divide el número 158.4 en partes proporcionales a 1.6, 1.8, y 3.2 respectivamente.
15. Reparte 1 616 naranjas en partes proporcionales a los números: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, y $\frac{3}{5}$.
16. Tres socios invierten \$ 50 000, \$ 70 000, y \$ 90 000 respectivamente, en un negocio que, al cabo de un año, da \$ 1 323 000 de beneficios. ¿Cuánto se llevará cada uno?
17. Ana ha recibido un pago por horas extras de \$ 1 360 por haber trabajado 8 horas extras. ¿Cuánto recibirán Víctor y José que han realizado 15 y 12 horas extras respectivamente?
18. Un padre decide repartir \$ 39 900 entre sus cinco hijos en partes proporcionales a las calificaciones que obtuvieron; que fueron 6, 8, 9, 8 y 7 respectivamente. Halla cuánto le corresponde al hijo que obtuvo la calificación más baja
19. Dos socios en el primer mes de su negocio, obtienen un beneficio de \$ 30 000. ¿Cuánto corresponde a cada uno si el primero aportó \$ 30 000 y el segundo, \$ 70 000?

Factor constante de proporcionalidad

Recuerda que una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas y es de uso muy común.

El factor constante de proporcionalidad puede utilizarse para expresar la relación entre cantidades.

Ejemplo

La receta de un pastel de vainilla indica que para cuatro personas se necesitan 200 g de harina, cuatro huevos y 120 g de azúcar.

¿Cómo adaptar la receta para cinco personas?

La mayoría de la gente calcularía las cantidades para una persona (dividiendo por cuatro) y luego las multiplicaría por el número de personas, cinco. Una minoría no siente la necesidad de pasar por las cantidades unitarias (es decir por persona) y multiplicaría los números de la receta por $\frac{5}{4} = 1.25$ que equivale al **factor constante de proporcionalidad (k)**.

$$\frac{5}{4} \times 200 = \frac{5 \cdot 200}{4}$$

250 g

$$\frac{5}{4} \times 4 = \frac{5 \cdot 4}{4}$$

5 huevos

$$\frac{5}{4} \times 120 = \frac{5 \cdot 120}{4}$$

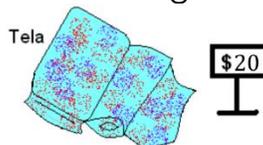
120 g

Lo que equivale a añadir cinco huevos, 250 g de harina y 150 de azúcar tendrá el mismo sabor que el otro, si el cocinero aficionado se muestra tan bueno como el chef que escribió la receta.

Otro ejemplo:

Si un metro de tela tiene un precio de \$ 20, el costo de un tramo de tela depende del número de metros que tenga de largo. A mayor número de metros de tela, mayor será el costo de la misma.

Esta relación la puedes apreciar en la siguiente tabla:



Largo de tela (m)	1	2	2.5	3	7.75	6	7	10
Costo (pesos)	20	40	50	60	155	120	140	200

Como observas el **factor constante de proporcionalidad** es **20** ya que si divides el costo entre el largo de la tela siempre te va a dar 20, por tanto **k=20**

Ejercicio

Completa las siguientes tablas y escribe cuál es el factor constante de proporcionalidad

Nota: Todas las tablas son de proporcionalidad directa

Número de panes	1	2	3		8	
Costo (pesos)		24		48		120

(k): _____

Porción de sal	4		8	10	12
Kilogramos		9		15	

(k): _____

Recorrido (km)		20			90	100
Gasolina (litros)	1		4	7	9	

(k): _____

Cemento (kg)		6			24
Grava (dm ³)	1	2	3	5	

(k): _____

Pelotas (número)	2	5			15	27
Costo (pesos)	14		49	63		

(k): _____

Bolsas (número)		5	9		57
Peso (g)	20			55	287

(k): _____

Proporcionalidad, valor faltante

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Extremo} & \longleftarrow & a & = & c & \longrightarrow & \text{Medio} \\ & & b & & d & & \\ \text{Medio} & \longleftarrow & & & & \longrightarrow & \text{Extremo} \end{array}$$

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios, **a** y **d** se llaman **extremos**, **b** y **c** **medios**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Por tanto en una proporción siempre que se conocen tres de los cuatro términos de la proporción, se puede encontrar el valor del término desconocido.

Ejemplo

Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.

El total de minutos es **105** en **60** vueltas. Con estos dos valores planteamos la primera razón $\frac{105}{60}$

El total de minutos es **x** en **40** vueltas. Con estos dos valores planteamos la segunda razón $\frac{x}{40}$

$$\text{Primera razón } \frac{105}{60}$$

$$\text{Segunda razón } \frac{x}{40}$$

Con estas dos razones planteamos la proporción y resolvemos.

$$\begin{aligned} \frac{105}{60} &= \frac{x}{40} \\ \frac{105 \cdot 40}{60} &= 70 \end{aligned}$$

El coche tarda 70 minutos en recorrer las 40 vueltas

Ejercicios 1

Calcula el valor faltante de las siguientes proporciones:

$\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$	$\frac{7}{14} = \frac{x}{10}$	$\frac{3}{7} = \frac{x}{28}$	$\frac{5}{y} = \frac{15}{9}$	$\frac{2}{n} = \frac{8}{32}$
$\frac{x}{4} = \frac{6}{2}$	$\frac{y}{5} = \frac{8}{20}$	$\frac{3}{5} = \frac{12}{m}$	$\frac{4}{5} = \frac{12}{b}$	$\frac{2}{3} = \frac{12}{w}$
$\frac{3}{9} = \frac{f}{27}$	$\frac{90}{c} = \frac{15}{85}$	$\frac{a}{5} = \frac{6}{15}$	$\frac{7}{8} = \frac{56}{p}$	$\frac{h}{100} = \frac{15}{75}$
$\frac{8}{a} = \frac{16}{12}$	$\frac{20}{x} = \frac{6}{15}$	$\frac{r}{8} = \frac{9}{12}$	$\frac{15}{70} = \frac{30}{z}$	$\frac{4}{12} = \frac{d}{3}$

Proporcionalidad, regla de tres

Las reglas de tres son **operaciones** (multiplicación y división) que relacionan varias magnitudes y en las que se genera una **ecuación** porque es necesario hallar un valor desconocido llamado incógnita.

Si la relación es de dos magnitudes, la regla de tres se denomina **simple**.

Si la relación es de tres o más magnitudes, la regla de tres se denomina **múltiple o compuesta**.

En las **reglas de tres** hay **una sola incógnita** mientras que en los **repartos proporcionales** hay más de una incógnita.

Dependiendo del tipo de relación entre las magnitudes, las reglas de tres se clasifican en **directas, inversas y mixtas**

La **regla de tres directa** se aplica cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones:

A más \longrightarrow más.
A menos \longrightarrow menos.

Ejemplo 1

Un automóvil recorre **240 km** en **3 horas**. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en **2 horas**?

Son magnitudes **directamente proporcionales**, ya que **a menos** horas recorrerá **menos** kilómetros.

kilómetros	horas		
240 km \longrightarrow	3 h \longrightarrow	A más kilómetros	más horas
x km \longrightarrow	2 h \longrightarrow	A menos kilómetros	menos tiempo

} Proporcionalidad directa

Se plantea la proporción:

$$\frac{240}{x} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{240 \cdot 2}{3}$$

$$x = 160$$

Por tanto: **Se recorrerán 160 kilómetros en 2 horas**

Ejemplo 2

Ana compra 5 kg de papas, si 2 kg cuestan \$ 15, ¿Cuánto pagará Ana?

Son magnitudes **directamente proporcionales**, ya que **a más kilos, más dinero**.

kilogramos	dinero	
2 kg	15	A menos kilogramos menos dinero
5 kg	x	A más kilogramos más dinero

} **Proporcionalidad directa**

Se plantea la proporción:

$$\frac{2}{5} = \frac{15}{x}$$

$$x = \frac{5 \cdot 15}{2}$$

$$x = 37.5$$

Por tanto: **Ana pagará \$ 37.50**

Ejemplo 3

Una máquina envasa 1 200 latas de refresco en una jornada de 8 horas. ¿Cuántas latas de refresco envasará en un día que se trabajó 5 horas?

latas	horas	
1 200	8	A más latas más horas
x	5	A menos latas menos horas

} **Proporcionalidad directa**

Se plantea la proporción:

$$\frac{1\ 200}{x} = \frac{8}{5}$$

$$x = \frac{1\ 200 \cdot 5}{8}$$

$$x = 750$$

Por tanto: **Se envasarán 750 latas en 5 horas**

Ejercicio 1

Subraya sólo los problemas de proporcionalidad directa y resuélvelos

1. El precio de 25 latas de aceite es de \$ 248, ¿Cuántas latas se podrán comprar con \$ 1 240?
2. Si 15 hombres hacen una obra de construcción en 60 días, ¿Cuánto tiempo emplearán 20 hombres para realizar la misma obra?
3. Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días, ¿Cuántos más deben de añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?
4. Juan escucha la radio durante 30 minutos, lapso en el que hay 7 minutos de anuncios comerciales; si escucha la radio durante 120 minutos, ¿Cuántos minutos de anuncios escuchará?
5. Durante 70 días de trabajo Ana ganó \$ 3 500, ¿Cuánto ganará si trabaja 12 días más?
6. Un ciclista recorrió cierta distancia en 4 horas con una velocidad de 60 km/h, ¿Qué velocidad deberá llevar para recorrer la misma distancia en 5 horas?
7. Si se llenan 24 frascos con capacidad para 250 gramos, con mermelada de fresa, ¿Cuántos frascos de 300 gramos se pueden llenar con la misma cantidad de mermelada?
8. Un automóvil gasta 9 litros de gasolina cada 120 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer?
9. Un leñador tarda 8 segundos en dividir en 4 partes un tronco de cierto tamaño, ¿Cuánto tiempo tardará en dividir un tronco semejante en 5 partes?
10. En un libro de 80 páginas cada una tiene 35 líneas, ¿Cuántas páginas tendrá el mismo libro si en cada una se colocan 40 líneas?
11. Teresa tiene en su tienda varios sacos de harina de 18 kg y va a vender cada uno en \$ 108, pero como nadie quiere comprar por saco decide venderla por kilogramos. Su primer cliente le pidió 4 kg, ahora ella quiere saber cuánto debe cobrarle.

12. Don Arturo tiene una pastelería y sabe que para hacer un pastel de fresas para 8 personas utiliza 2 kg de azúcar, ¿Qué cantidad de azúcar utilizará si le encargan un pastel, también de fresas, que alcance para 24 personas?
13. Una piscina se llena en 10 horas con una llave que arroja 120 litros de agua por minuto, ¿Cuántos minutos tardará para llenarse si esta llave arrojara 80 litros del líquido?
14. Un grupo de 45 estudiantes de una secundaria contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar \$ 50; finalmente sólo asisten 30 estudiantes, ¿Cuánto deberá pagar cada uno?
15. Una bodega se llena con 3 500 sacos de 6 kg de papas cada uno y otra de la misma capacidad se llena con sacos de 5 kg, ¿Cuántos sacos caben en la segunda bodega?
16. El valor de 25 m² de azulejo es de \$ 3 125. ¿Cuántos m² se comprarán con \$ 15 625?
17. Si 9 tarros tienen un precio de \$ 450, ¿Cuántos tarros se comprarán con \$ 7 200?
18. Se compraron 40 kg de dulces para repartirlos equitativamente entre 120 niños. ¿Cuántos kilogramos se necesitarán para un grupo de 90 pequeños?
19. Un microbús cobra a una persona \$ 17.50 de pasaje por una distancia de 21 kilómetros, ¿Cuánto pagará otra persona, cuyo destino está a 51 kilómetros de distancia?
20. Si 18 metros de alambre cuestan \$ 63. ¿Cuál será el precio de 42 m?
21. Un ejército de 900 hombres tiene víveres para 20 días; si se desea que las provisiones duren 10 días más, ¿Cuántos hombres habrá que dar de baja?
22. Si una docena de pañuelos cuesta \$ 200, ¿Cuánto se pagará por 9 de ellos?
23. Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7 200 gramos, ¿Cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?

24. A cierta hora del día un palo de 1.5 metros de largo proyecta una sombra de 60 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2.40 metros?
25. Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿Cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 500 kilómetros?
26. Una máquina envasa 1 200 latas de refresco en una jornada de 8 horas. ¿Cuántas latas de refresco envasará en un día que trabaje 5 horas?
27. En una campaña publicitaria 6 personas reparten 5 000 folletos. ¿Cuántas personas repartirán 3 000 folletos?

Escala

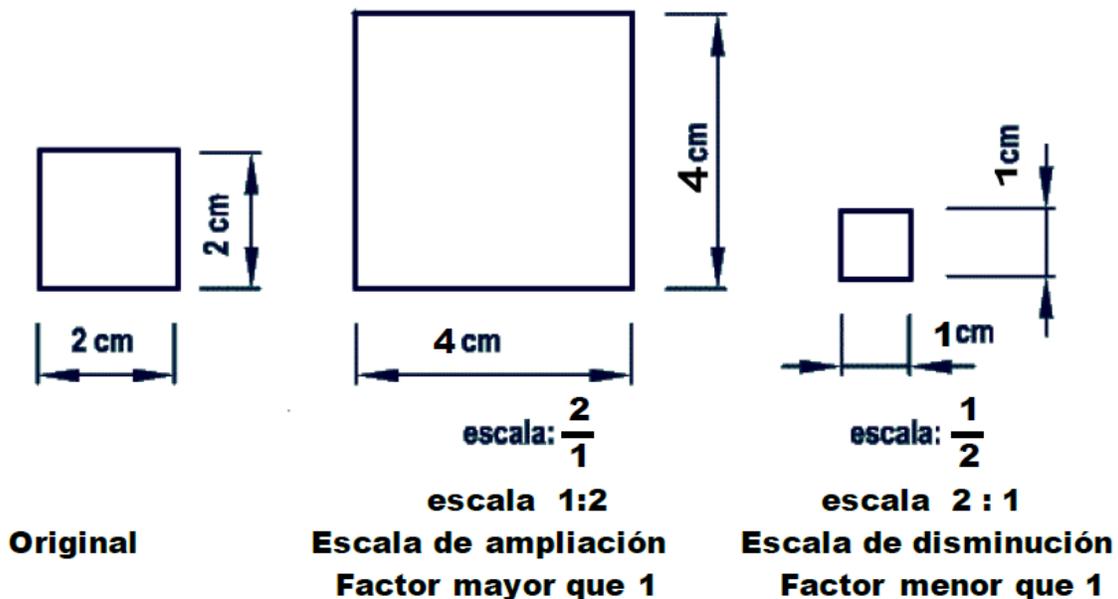
Cuando se necesita hacer un dibujo que se vea como la realidad y lo queremos representar más chico o más grande se hace un **dibujo a escala**, que es un dibujo proporcional a la realidad de sus medidas.

Es la proporción de aumento o disminución que existe entre las dimensiones reales y las dimensiones representadas de un objeto.

En efecto, para representar un objeto de grandes dimensiones, deben dividirse todas sus medidas entre un factor mayor que uno, en este caso denominado **escala de reducción**; y para representar objetos de pequeñas dimensiones, todas sus medidas se multiplican por un factor mayor que uno, denominado **escala de ampliación**.

El dibujo hecho a escala mantendrá proporcionalmente todas las medidas del objeto representado, y mostrará una imagen de la apariencia real del mismo. Finalmente, deben indicarse sobre el dibujo las dimensiones del objeto real, y la escala en que ha sido elaborado.

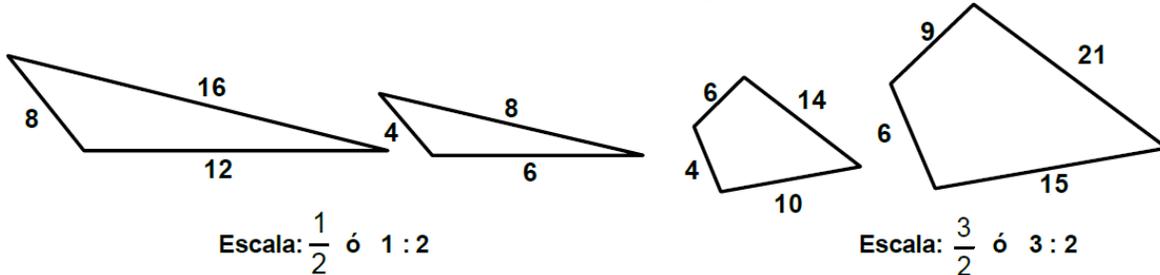
A manera de ejemplo se presenta la figura comparativa de un cuadrado de 2 cm de lado dibujado en sus dimensiones reales es decir las originales, (escala $\frac{1}{1}$; multiplicando sus medidas por dos (escala $\frac{2}{1}$); y dividiendo sus medidas entre dos es decir escala $\frac{1}{2}$).



Escalas

La escala es una relación entre la medida del dibujo y la medida del objeto real, o sea:

$$\text{escala} = \frac{\text{Dibujo}}{\text{Realidad (original)}}$$



Observa que todas las medidas están en la misma proporción:

La mitad de la medida original

Medida original	Medida a escala
16	$16 \div 2 = 8$
8	$8 \div 2 = 4$
12	$12 \div 2 = 6$

La medida original por 3 y dividido entre 2

Medida original	Medida a escala
4	$4 \times 3 \div 2 = 6$
6	$6 \times 3 \div 2 = 9$
14	$14 \times 3 \div 2 = 21$
10	$10 \times 3 \div 2 = 15$

Quedando:

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} \quad \leftarrow \text{Medidas a escala} \rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{21}{14} = \frac{15}{10} \quad \leftarrow \text{Medidas originales} \rightarrow$$

Ejercicio 1

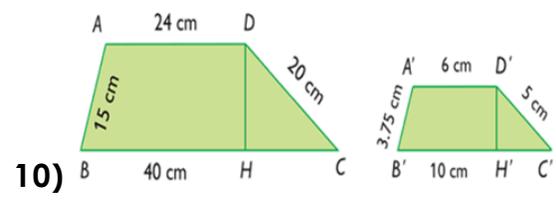
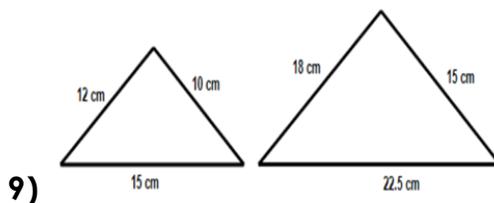
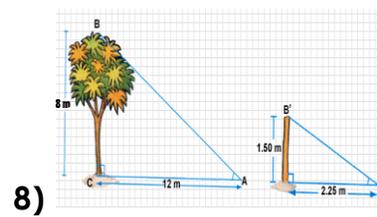
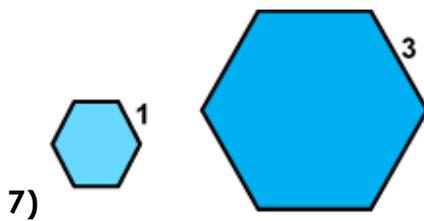
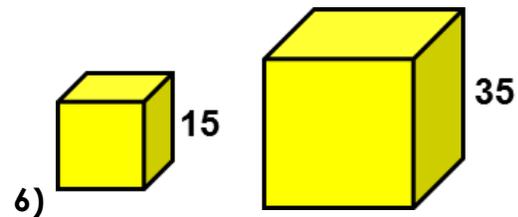
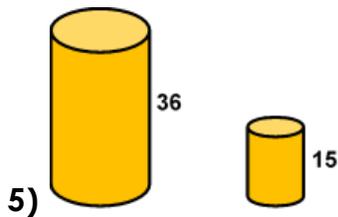
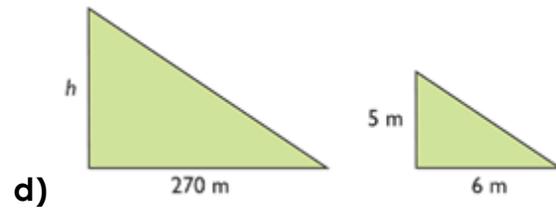
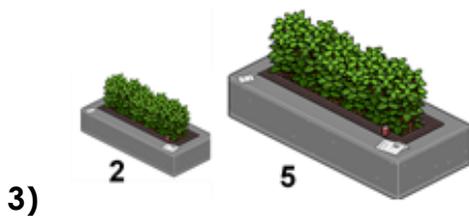
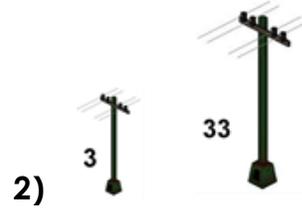
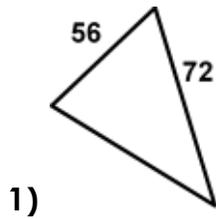
De acuerdo con la escala di si es una ampliación o una reducción.

Escala	Reducción o ampliación
$\frac{1}{2}$	
$\frac{7}{4}$	
$\frac{4}{1}$	

Escala	Reducción o ampliación
6 : 3	
2 : 20	
15 : 9	

**Ejercicio 2****Contesta lo que se te pide**

En las dos figuras que en cada caso se dan, la segunda es reproducción a escala de la primera o sea son semejantes. Determina el factor a que está construida la segunda figura.



**Factor inverso, en una reproducción a escala**

Las medidas de la siguiente foto son 7 cm de ancho y 4 cm de altura, se redujo con una escala de $\frac{1}{2}$



Pero si se quisiera regresar a su tamaño original ¿Qué se debe hacer?

Se aplica el factor inverso y la escala queda: $\frac{2}{1}$

Las medidas originales de la fotografía son 14 cm de ancho y 8 cm de altura



Es decir:

Factor		Factor inverso
$\frac{8}{3}$	\rightarrow	$\frac{3}{8}$
	\rightarrow	$\frac{3}{8}$

Factor		Factor inverso
$\frac{3}{4}$	\rightarrow	$\frac{4}{3}$
	\rightarrow	$\frac{4}{3}$

Factor		Factor inverso
$\frac{12}{9}$	\rightarrow	$\frac{9}{12}$
	\rightarrow	$\frac{9}{12}$

Observa que el factor inverso es el recíproco de la escala.

Ejercicio 1

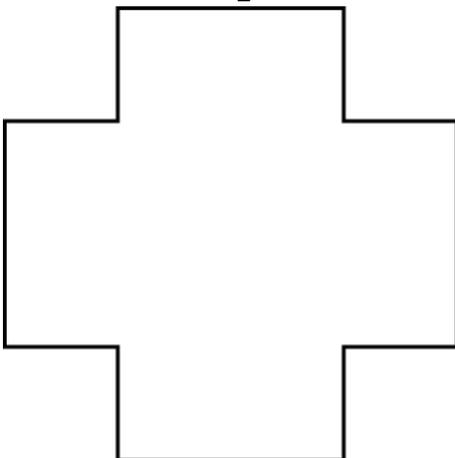
Escribe el factor inverso de cada una de las siguientes escalas.

Escala	Factor inverso a la escala	Escala	Factor inverso a la escala	Escala	Factor inverso a la escala
$\frac{3}{4}$		$\frac{36}{5}$		$\frac{1\ 800}{70}$	
$\frac{5}{6}$		$\frac{6}{200}$		$\frac{7}{3\ 500}$	
$\frac{1}{2}$		$\frac{900}{9}$		$\frac{3}{8}$	

Ejercicio 2

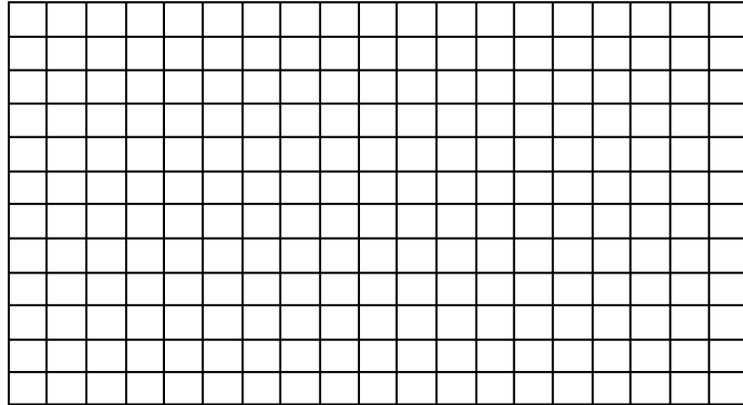
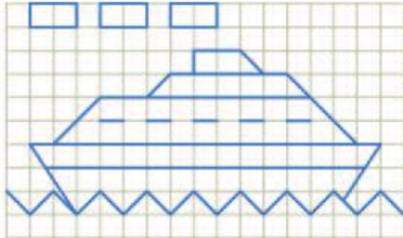
Resuelve los siguientes problemas

- Una fotocopia se redujo a 12 cm de ancho y 9 cm de alto. ¿Cuáles serán sus medidas reales si se disminuyó a una escala de $\frac{2}{3}$?
- Si a una litografía se le aplica una escala $\frac{3}{1}$ y queda con una altura de 78 cm y de ancho 105 cm, ¿Cuáles eran las medidas originales?
- Traza la figura original si se sabe que a la figura siguiente se le aplicó una escala de $\frac{3}{2}$





4. Juan hizo este dibujo con una escala de $\frac{1}{2}$ y se quiere dibujar el modelo original ¿cómo lo harías?



5. La maqueta que hizo Juan del edificio donde vive la elaboró a una escala de $\frac{1}{200}$ (1:200). La maqueta tiene una altura de 24 cm ¿Cuál es la altura original en metros del edificio donde vive Juan?

6. El siguiente croquis corresponde a un departamento. Está a una escala de 1:100 $\left(\frac{1}{100}\right)$



Cuál es la medida real de la sala: _____

Cuál es la medida real de la cocina: _____

Cuál es la medida real de la recamara _____

Cuál es la medida real del baño _____

Si el sillón sus medidas a escala son: 1 cm de ancho por 2.36 cm, cuál es la medida real del sillón:

Cuál es el factor inverso a la escala que se aplicó para hacer el croquis del departamento: _____

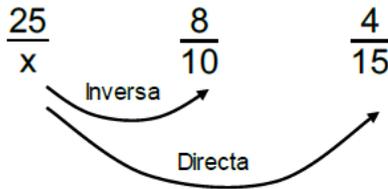
Proporcionalidad múltiple

Es una serie de tres o más razones iguales, a éstas se le llama proporcionalidad múltiple.

Ejemplo:

Si 25 obreros, trabajan durante 8 horas, pintan 4 km de carretera, ¿Cuántos obreros, trabajando 10 horas, se necesitarían para pintar 15 km?

Obreros Horas Kilómetros



$$\frac{25}{x} = \frac{10}{8} \times \frac{4}{15}$$

$$\frac{25}{x} = \frac{40}{120}$$

$$\frac{25 \times 120}{40} = \frac{3000}{40} = 75$$

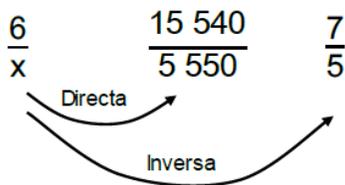
Se necesitan 75 obreros para pintar

Ejercicio 1

Resuelve los siguientes problemas

- Una familia de 6 personas ha pagado por 7 días de vacaciones \$ 15 540. Si una familia ha estado de vacaciones 5 días y pagado \$ 5 550. ¿Cuántas personas tiene la familia?

Personas Dinero Días



$$\frac{6}{x} = \frac{15\,540}{\boxed{}} \times \frac{\boxed{}}{7}$$

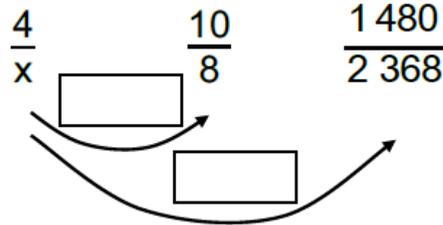
$$\frac{6}{x} = \frac{77\,700}{\boxed{}}$$

$$\frac{6 \times \boxed{}}{77\,700} = \frac{6\,233\,100}{\boxed{}} = \boxed{}$$

La familia consta de personas

2. Si para transportar 1 480 toneladas de tierra hacen falta 4 camiones durante 10 días. Si se tienen que transportar 2 368 toneladas de tierra, durante 8 días. ¿Cuántos camiones se necesitaran?

Camiones Días Toneladas



3. Si 15 obreros, trabajan durante 6 horas, pintan 3 km de carretera, ¿Cuántos obreros, trabajando 9 horas, se necesitarían para pintar 12 km?
4. Una familia de 6 personas ha pagado por 7 días de vacaciones \$ 15 540. Si una familia ha estado de vacaciones 5 días y pagado \$ 5 550. ¿Cuántas personas tiene la familia?
5. Si para transportar 1 480 toneladas de tierra hacen falta 4 camiones durante 10 días. Si se tienen que transportar 2 368 toneladas de tierra, durante 8 días. ¿Cuántos camiones necesitamos?
6. Si 21 personas hacen un trabajo en 4 días, trabajando 4 horas diarias, ¿Cuántas personas serán necesarias para hacer el mismo trabajo en 2 días trabajando 6 horas diarias?
7. Seis piezas de tela, de 60 m de largo y 0.90 m de ancho, han costado \$ 1 800. ¿Cuál será el valor de 8 piezas de la misma tela cuyo largo es 90 m, siendo 1.25 m su anchura?

Frecuencia relativa y absoluta

El número de veces que se repite un dato se denomina **frecuencia**. En la **tabla de frecuencias** se organizan todos los datos junto a las frecuencias que les corresponden.

Ejemplo:

Datos del estado del tiempo de los días:

Soleado, lluvia, sol y nubes, sol y nubes, nublado, soleado, soleado, soleado, lluvia, lluvia, sol y nubes, soleado, sol y nubes, nublado, nublado, soleado, soleado, soleado, lluvia, nublado, sol y nubes, nublado, sol y nubes, sol y nubes, soleado, soleado, soleado, sol y nubes, sol y nubes, soleado.

TABLA DE FRECUENCIAS	
TIEMPO	FRECUENCIA NÚMERO DE DÍAS
SOLEADO	12
SOL Y NUBES	9
NUBLADO	5
LLUVIA	4
TOTALES	30

Frecuencia absoluta es el número de veces que se repite cada dato.

Frecuencia relativa ésta se obtiene dividiendo la frecuencia entre el número total de datos.

Ejemplo:

Número de canastas que metieron dos equipos de basquetbol en un partido

EQUIPO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
PUMAS	21	$\frac{21}{29} = 0.72$
TECOLOTES	8	$\frac{8}{29} = 0.28$
TOTALES	29	$\frac{29}{29} = 1$

Ejercicio 1

Elabora una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los siguientes datos:

El número de veces que los alumnos de una clase que han ido al cine en el mes de diciembre.

5, 4, 0, 1, 1, 4, 5, 8, 3, 2, 0, 4, 2, 3, 3, 2, 7, 1, 0, 3, 8, 4, 5, 6, 7, 2, 8, 0, 1, 2, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 1, 5, 3, 6

Ejercicio 2

Elabora una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los siguientes datos y contesta lo que se te pregunta.

En una secundaria un grupo de primero de 45 alumnos elabora en la asignatura de Matemáticas un trabajo:

5 alumnos lo elaboran en una página, 2 en cinco páginas, 1 en dos páginas, 6 en cuatro páginas, 26 en tres páginas y 5 en cinco páginas. ¿Crees posible que el maestro haya recomendado hacer el trabajo en un número determinado de hojas?

Interpretación de gráfica de barras

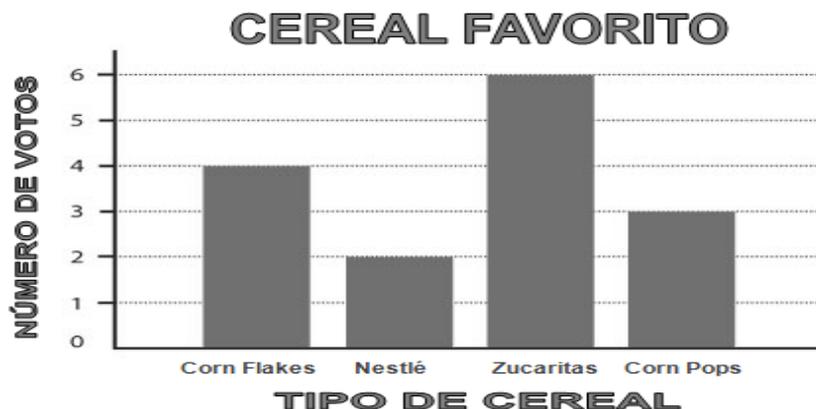
Crear y mostrar información con tablas y gráficas es una manera de estimular la mente porque sirven para representar información ordenada y de fácil consulta.

En una gráfica de barras se registran los resultados de una encuesta, entrevista o investigación, para presentarlos e interpretarlos fácilmente. Una gráfica de barras tiene un eje horizontal en el que se escriben los datos que se van a contabilizar, y un eje vertical en el que se escribe la frecuencia de cada dato y unas barras que pueden estar ubicadas de manera vertical u horizontal.

Las gráficas de barras son gráficas sencillas en las que la altura de cada barra ofrece información. Las gráficas de barras utilizan algunas palabras de un vocabulario que nos ayuda a entender la información de la gráfica.

- El **título de la gráfica** nos ayuda a saber cuál es la información que podemos encontrar en la gráfica. El título de la gráfica se encuentra generalmente en la parte superior de la misma. El título de nuestro ejemplo de gráfica de barras es “cereal favorito”.
- Los **ejes** son los dos lados de la gráfica. El **eje vertical** va de abajo para arriba. El **eje horizontal** se extiende a lo largo de la parte inferior de la gráfica de izquierda a derecho.
- El **nombre de los ejes** nos dicen la información que se presenta en cada eje. En nuestra gráfica de ejemplo uno de los ejes es el tipo de cereal. El otro es el número de votos.
- La **altura de la barra** indica el valor de cada opción. En el ejemplo, la altura de las barras indica cuántas personas votaron por cada cereal.

Ejemplo:



De esta gráfica se pueden formular algunas preguntas u obtener información como:

¿Cuál es el título de nuestra gráfica?, ¿Qué información nos indica cada lado de la gráfica?, ¿Qué cereal obtuvo más votos? ¿Qué cereal obtuvo menos votos? ¿Puedes enumerar los cereales por orden de más a menos votos obtenidos? ¿Cuántas personas votaron?

O información como:

El cereal favorito de los votantes fueron las Zucaritas, los cereales Zucaritas y Corn Flakes son la preferencia de las dos terceras partes de los votantes, el orden de preferencia en gustos de los cereales de mayor a menor es Zucaritas, Corn Flakes, Corn Pops y por último Nestlé.

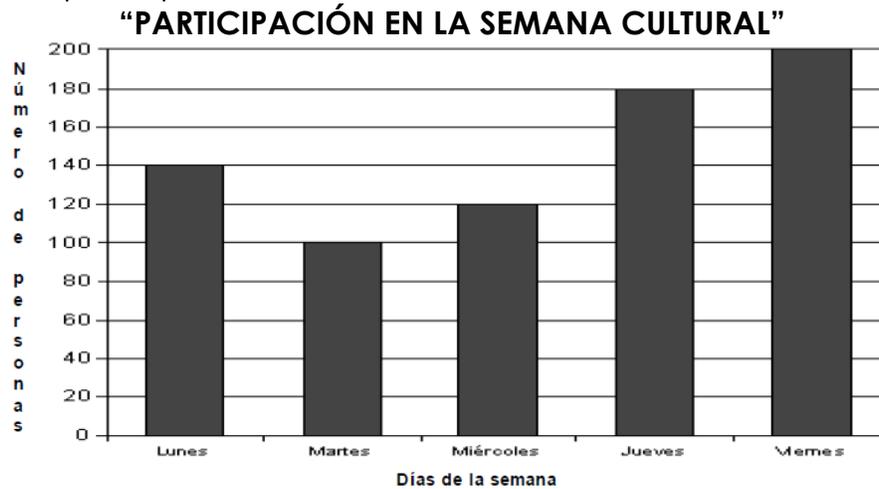
Ejercicio

- La siguiente gráfica representa los resultados de una encuesta a un grupo de alumnos con respecto al número de hermanos. Analízala y contesta lo que se te pide:



- ¿Cuántos alumnos no tienen hermanos?
- ¿Cuál es el mayor número de hermanos entre los estudiantes?
- En promedio, ¿cuántos hermanos tiene cada alumno?
- ¿Cuál es la mediana en el total de respuestas?

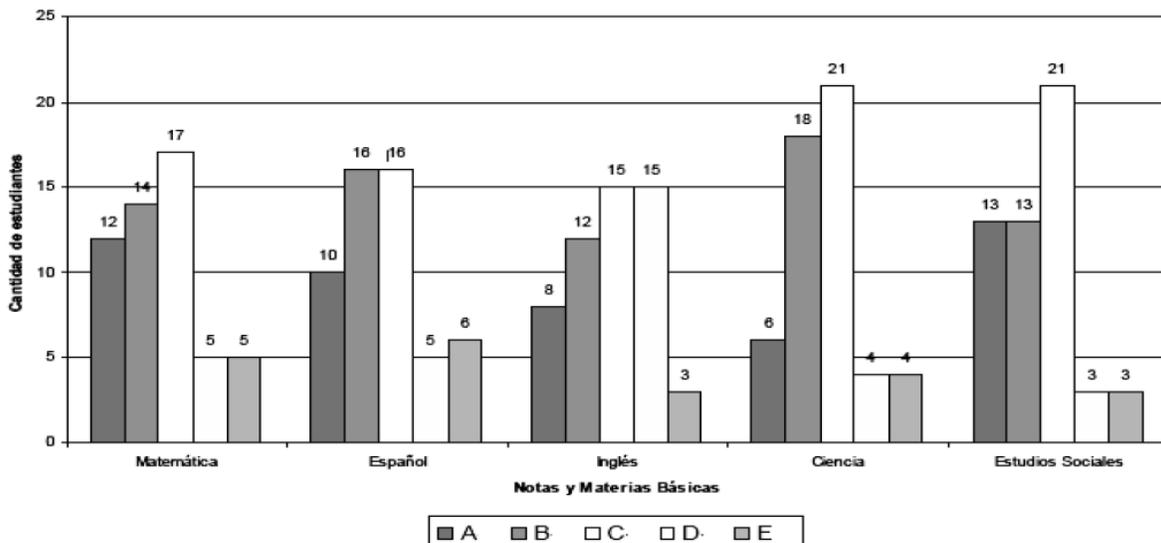
2. Juan ha representado en la gráfica de barras el número de personas que han participado en las actividades de la "Semana Cultural".



- ¿Cuántos participantes hubo en los tres primeros días?
- ¿Y en toda la semana cuántos participaron?
- ¿En qué día participaron más personas?
- ¿En qué día participaron menos personas?
- ¿Cuál es la diferencia de participantes entre el día que participaron más y el día que participaron menos?

3. La siguiente gráfica muestra los aciertos en los exámenes bimestrales que se aplicaron en una secundaria a los alumnos de primer grado, contesta las siguientes preguntas:

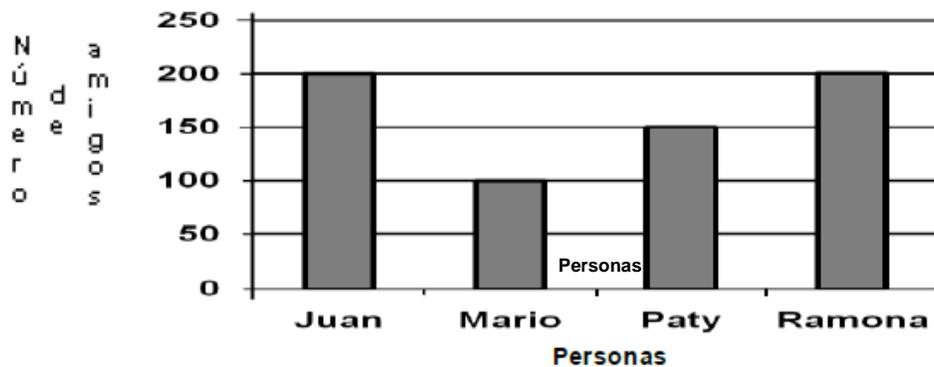
NÚMERO DE ACIERTOS DE LOS EXAMENES DEL PRIMER BIMESTRE POR GRUPO



- ¿Cuál fue el grupo que tuvo más aciertos en la prueba de matemáticas?
- ¿Cuál fue el grupo que tuvo menos aciertos en la prueba de matemáticas?
- ¿Cuál fue el grupo que tuvo más aciertos en la prueba de ciencias?
- ¿Cuál fue el grupo que tuvo menos aciertos en la prueba de ciencias?
- ¿Cuál fue el grupo con mayor aprovechamiento en todas las materias?
- ¿Cuál fue el grupo con menor aprovechamiento en todas las materias?

4. La gráfica siguiente muestra el número de amigos que tienen 4 personas, contesta lo que se te pide analizando la gráfica de barras.

LOS AMIGOS



- ¿Cuántos amigos tiene más Juan que Paty?
- ¿Quién tiene menos amigos?
- ¿Cuál de ellos tiene más amigos?
- ¿Entre los cuatro cuántos amigos tienen en total?
- ¿Quién tiene más amigos las mujeres o los hombres?

Interpretación de gráficas circulares

Denominadas también gráficos de pastel o gráficas del 100%, se utilizan para mostrar porcentajes y proporciones. El número de elementos comparados dentro de un gráfico circular, pueden ser más de 3, ordenando los segmentos de mayor a menor, iniciando con el más amplio a partir de las 12 como en un reloj.

Una manera sencilla de diferenciar los segmentos es sombreándolos de claro a oscuro, siendo el de menor tamaño el más claro y el de mayor tamaño el más oscuro. El empleo de tonalidades o colores al igual que en la gráfica de barras, facilita la diferenciación de los porcentajes o proporciones.

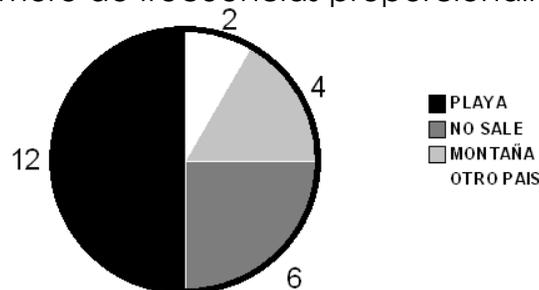
Para construir un gráfico de sectores o circular, se procede del siguiente modo:

En la siguiente gráfica se muestra la preferencia en gustos que las personas hacen en sus vacaciones.

1º Dividimos los 360° del círculo en un número de partes igual a la suma de las frecuencias.

VACACIONES	FRECUENCIA	AMPLITUD DEL ÁNGULO DE LA CIRCUNFERENCIA
PLAYA	12	$360 \times 12 \div 24 = 180^\circ$
MONTAÑA	4	$360 \times 4 \div 24 = 60^\circ$
OTRO PAÍS	2	$360 \times 2 \div 24 = 30^\circ$
NO SALE	6	$360 \times 6 \div 24 = 90^\circ$
TOTAL	24	360°

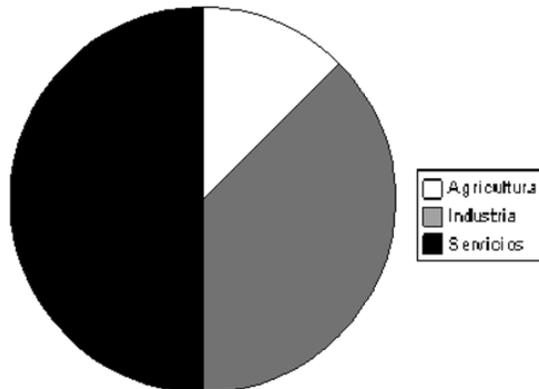
2º Asignamos un sector circular de acuerdo con la amplitud del ángulo calculado por el número de frecuencias proporcionalmente



De la gráfica se pueden formular varias preguntas como: ¿Las personas en su vacaciones prefieren?, ¿Qué porcentaje prefieren ir a la montaña?, ¿Qué es lo que menos prefieren las personas hacer en sus vacaciones? ¿Cuál es el porcentaje total de las preferencias de las personas que no salen y las que van a la playa?

Ejercicio

1. Contesta lo que se te pide, analizando la siguiente gráfica circular.

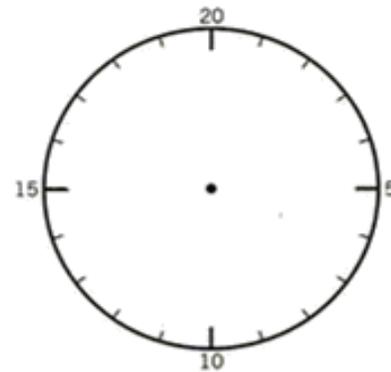


¿A qué se dedican la mayoría de las personas?

¿Ordena de mayor a menor las actividades profesionales que tienen las personas?

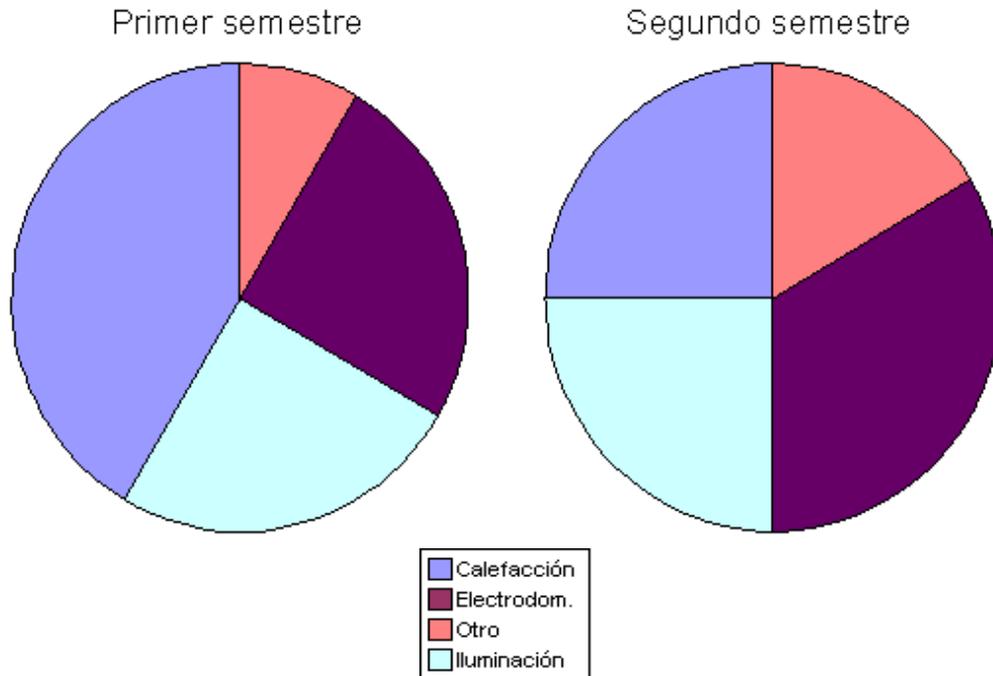
2. Representa en una gráfica de sectores o circular los datos de la siguiente tabla y contesta las preguntas que se te formulan:

TRANSPORTE	FRECUENCIA
COCHE	9
AVIÓN	1
AUTOCAR	6
TREN	4
TOTAL	20



- ¿Cuántas personas prefieren viajar en vacaciones por carretera?
- ¿Cuál es el medio de transporte menos elegido?
- ¿Qué porcentaje abarcan los que viajan en avión y en tren juntos?

3. Observa cómo se distribuyen los gastos de electricidad de una casa en el primer y el segundo semestre del año.

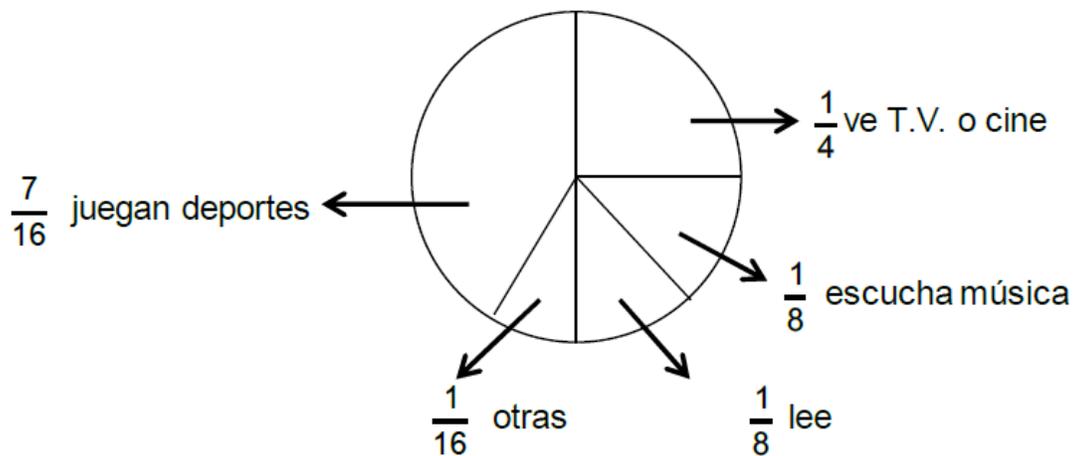


- ¿En qué concepto se ha gastado más dinero en el primer semestre? ¿Y en el segundo semestre?
- ¿En qué concepto se ha gastado igual en cada semestre?

4. Relaciona las actividades favoritas de los jóvenes que realizan en su tiempo libre:

¿A qué dedican los jóvenes, la mayor parte del tiempo libre?

¿A qué actividades dedican el mismo tiempo?



Conteo

Se sabe que la matemática está en casi todas las actividades del ser humano, pero muchas veces la forma de cómo se presenta es impresionante, especialmente cuando puede ocurrir de muchas maneras.

Cómo calcular el número de maneras diferentes, cómo se pueden acomodar los elementos de un conjunto de acuerdo con algunas condiciones dadas.

Ejemplo:

Si entra una persona a un salón donde hay 10 asientos disponibles, es evidente que tiene 10 maneras diferentes de elegir en qué silla se sienta, pero si entran 10 personas y se sientan, ¿de cuántas maneras diferentes habrán podido sentarse?, ¿puedes creer que hay 3 638 800 formas diferentes en que las 10 personas puedan elegir sus sillas? y que de esa gran cantidad de posibilidades las personas eligieron sólo una manera de sentarse.

Impresionante

¿No?

Ahora imagina si son 15 personas hay 1 307 674 368 000 formas de sentarse, es decir hay más de un billón de formas.

Más impresionante

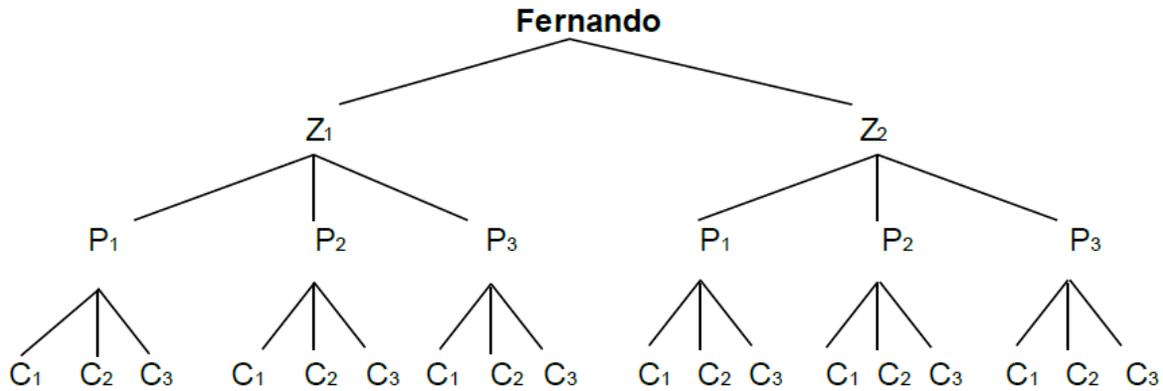
¿No crees?

Muchas veces nos encontramos con diversos problemas de matemáticas en donde debemos contar, y tener un buen método de conteo ayuda mucho.

Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar, se podrían definir como representaciones gráficas que nos ayudan a poder determinar los posibles resultados en un problema o evento específico, algunas de estas técnicas pueden ser los **diagramas de árbol** y los **arreglos rectangulares**.

Para resolver problemas de conteo en ocasiones se utiliza el **diagrama de árbol**. Este tipo de ordenamiento se puede emplear para conocer exactamente las combinaciones de los elementos que intervienen en un evento se puede verificar con la regla de producto.

Por ejemplo: Fernando tiene 2 pares de zapatos, 3 pantalones y 3 camisas. ¿De cuántas formas puede combinarlos?



Esto indica que Fernando tiene 18 formas de combinar su ropa. Equivale a 2 (pares de zapatos) x 3 (pantalones) x 3 (camisas) = **18 combinaciones**

Es decir, la regla de producto es $2 \times 3 \times 3 = 18$ combinaciones

También un arreglo rectangular es una herramienta que te sirve para resolver problemas de combinaciones y consta de renglones y columnas que al intersectarse, te van formando las combinaciones posibles, solamente que aquí sólo se pueden usar dos elementos para hacer las combinaciones, uno de acuerdo con el eje horizontal y otro de acuerdo con el eje vertical.

Ejemplo

Se tienen: dos sopas (arroz y pasta) y tres guisados (pollo, carne y huevo), cuántos menús diferentes se pueden hacer:

	pasta, pollo	pasta, carne	pasta, huevo
pasta	●	●	●
arroz	●	●	●
	pollo	carne	huevo

Técnica de la multiplicación

La técnica de la multiplicación: Si hay “m” formas de hacer una cosa y hay “n” formas de hacer otra cosa, hay (m) (n) formas da hacer ambas cosas.

Ejemplo:

Un vendedor de autos quiere presentar a sus clientes todas las diferentes opciones con que cuenta:

Auto convertible, auto de 2 puertas y auto de 4 puertas, cualquiera de ellos con rines deportivos o estándar. ¿Cuántos diferentes arreglos de autos y rines puede ofrecer el vendedor?

m es el número de modelos = 3

n es el número de tipos de rin = 2

Número total de arreglos: **3 x 2**

Hay 6 opciones

Ejercicio**Resuelve los siguientes problemas**

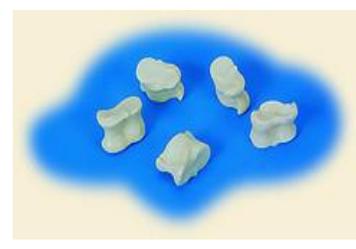
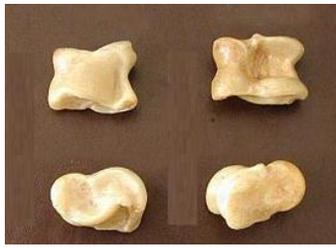
1. ¿De cuántas formas diferentes hay para elegir dos sabores de un helado, si hay cinco sabores distintos?
2. Un pequeño restaurante ofrece 2 sopas, 3 guisados y 4 postres. ¿Cuántos menús diferentes pueden ofrecer a sus clientes?
3. En el grupo de 1º "B" se formaron 5 equipos de 6 integrantes cada uno. Si cada integrante realizó 2 dibujos ¿Cuántos dibujos hicieron en total?
4. Dolores tiene 3 pares de zapatos, 4 faldas y 5 blusas. ¿De cuántas maneras puede combinar su ropa?
5. Si se lanza una moneda al aire tres veces, ¿cuántos resultados será posible obtener?
6. Para ir de una ciudad A a la D se requiere pasar por las ciudades B y C. Si de A a B hay 2 caminos; de B a C hay 4 y de C a D hay 3. ¿De cuántas formas distintas se puede ir de A a D?
7. Si tienes dos pantalones de mezclilla (uno negro y otro azul) y dos playeras (una blanca y otra gris) ¿De cuántas maneras puedes vestirte?
8. Para hacer un menú se tiene 3 sopas (consomé, pasta y pasta), 3 guisados (carne, pollo y chilaquiles) y 3 postres (nieve, flan y gelatina). ¿Cuántos menús diferentes se pueden hacer?

9. Cuál es el número de combinaciones que puede hacer Perla con tres bolsas (negra, gris y blanca), dos pares de zapatos (negros y blancos) y tres vestidos (blanco, negro y rojo).
10. Un médico general clasifica a sus pacientes de acuerdo con: su sexo (masculino o femenino), tipo de sangre (A, B, AB y O) y en cuanto a la presión sanguínea (normal, alta y baja). Mediante un diagrama de árbol di en cuántas clasificaciones diferentes pueden estar los pacientes de este médico
11. Un cartero distribuye cinco cartas en tres casilleros, ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
12. En una agencia de automóviles se ha lanzado una promoción para la adquisición de autos usados. Los consumidores pueden adquirirlos con llantas normales o deportivas, incluirle algún accesorio (radio, espejo lateral derecho o rines deportivos). Además, pueden elegir alguno de los colores de la promoción (amarillo, rojo, azul). De cuántas maneras diferentes los clientes pueden elegir su automóvil.
13. Un helado puede venir en un cono o un barquillo y los sabores son chocolate, fresa y vainilla. De cuántas maneras diferentes puedo escoger mi helado.
14. Si en una cocina económica se ofrecen tres tipos de sopas: arroz, fideos y consomé; se ofrecen cuatro tipos de guisado: pollo, huevos, carne y atún; y se ofrecen dos postres: fruta o gelatina. Se desea conocer ¿cuántas posibilidades se tienen para hacer un menú?
15. En una caja existen: 7 plumas, 3 lápices y 4 plumones todos diferentes entre sí. Determina el número de formas en las que se puede seleccionar una pluma, un lápiz y un plumón.
16. Puede comprarse un medicamento para la cura de asma ya sea líquido, en tabletas o en cápsulas, de 5 diferentes laboratorios y todas las presentaciones en concentración regular o alta. ¿En cuántas formas diferentes puede un médico recetar la medicina a un paciente que sufre de este padecimiento?

Probabilidad

El concepto de probabilidad es muy antiguo y a lo largo de la historia se ha definido de distintas formas, aunque todas ellas mantienen en común las características básicas del concepto.

Los juegos de azar son tan antiguos como la humanidad, antes de usar los dados, la ruleta, las monedas y la baraja se jugaba con las tabas (Las tabas son huesos de la rodilla de las patas traseras de los corderos que en ocasiones se pintaban de diferentes colores y servían para jugar).



Algunos de los primeros dados fueron hechos de arcilla, cuero o hueso hace más de 4 000 años. Los griegos usaron los sólidos platónicos para hacer dados poliédricos y, seguramente, practicaron algunas actividades de azar ante Tique, su diosa de la suerte.

- Experimentos aleatorios son aquellos en los que interviene el azar y no podemos predecir con seguridad sus resultados.
- A cada resultado de experimentos aleatorios se le llama evento elemental y la probabilidad de que ocurra está entre 0 y 1, por lo que se calcula, considerando que si el total de resultados es 6, la probabilidad de que ocurra uno de ellos es $\frac{1}{6}$.

Probabilidad clásica

Es el cociente del número de veces que ocurrió un evento entre el número de veces que se realizó el experimento.

$$P(E) = \frac{\text{Numero de resultados favorables al evento}}{\text{Numeros totales de resultados posibles}}$$

Ejemplo:

En una urna hay 3 bolas blancas, 2 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar, salga roja.

Hay en total **2** bolas rojas en la urna

Hay en total **9** bolas en la urna que es el número total de resultados posibles.

$$P(\text{Salir bola roja}) = \frac{2}{9}$$

Experimento:

Que caiga en un dado:	Probabilidad	Forma decimal
7	$\frac{0}{6}$	Evento imposible porque en un dado no hay número 7
5	$\frac{1}{6}$	$1 \div 6 = 0.17$
1 ó 6	$\frac{2}{6}$	$2 \div 6 = 0.33$
Número par (2, 4, 6)	$\frac{3}{6}$	$3 \div 6 = 0.50$
Número par ó el número 5	$\frac{4}{6}$	$4 \div 6 = 0.67$
Número par ó los números 3, 5	$\frac{5}{6}$	$5 \div 6 = 0.83$
Número par ó número impar	$\frac{6}{6}$	$6 \div 6 = 1.0$ Evento seguro (cualquier número del dado)

Ejercicio 1
Contesta lo que se te pide.

Al lanzar un dado:

Probabilidad de que caiga un número par: _____

Probabilidad de que caiga impar: _____

Probabilidad de que caiga el número 1: _____

Probabilidad de que caigan los números 2, 3, y 4: _____

Ejercicio 2
Probabilidad de:

Que en una bolsa con 10 fichas blancas, 10 negras y 10 verdes, sacar una ficha verde. _____

Al lanzar dos monedas caiga sol – sol _____

Al lanzar dos dados los puntos de sus caras sumen 10 _____

Que Juanito sea el elegido de los 8 mejores promedios para recibir un premio _____

En un tarjetero con fichas del 1 al 20 sacar una tarjeta que sea múltiplo de 7 _____

Al sortear un viaje a Cancún entre 120 personas salga yo ganador

Que en una bolsa con 5 dulces, 7 paletas y 3 chocolates, sacar una paleta

Ejercicio 3

Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Si se extrae una bola al azar calcular la probabilidad de que:

sea roja _____

sea verde _____

sea amarilla _____

no sea roja _____

no sea amarilla _____

Ejercicio 4

En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten los 45 alumnos, encuentra la probabilidad de que al salir el primer alumno sea:

un hombre _____

una mujer _____

una mujer rubia _____

una mujer morena _____

un hombre moreno _____

un hombre rubio _____