

El **Cuadernillo de Secundaria 2^{do} Grado** fue elaborado en el Centro de Regularización y Apoyo Educativo Intelimundo, por el siguiente equipo:

Dirección Académica y Proyectos de Investigación
Marisol Roman García y César Pasten Vilchis

Gerencia de innovación educativa
René Quiroz Díaz

Coordinación de diseño
José Iván Torres Hernández

Autor
René Quiroz Díaz y César Pasten Vilchis

Diseño de interiores y portada
Stephanie Quiroz Roman

La presentación y disposición en conjunto y de cada página del **Cuadernillo de Secundaria 2^{do} Grado** son propiedad de Intelimundo, queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier sistema o método electrónico, incluso el fotocopiado, sin autorización escrita de **Intelimundo**.

ISBN: En trámite.

Intelimundo (René Quiroz Díaz), Calle Aldama 23-B, San Antonio Tecomitl, Milpa Alta, C.P. 12100, México D.F.

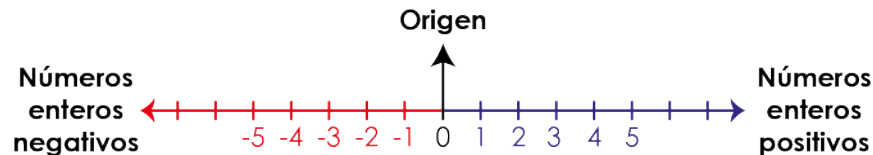
Marzo de 2013
Impreso en México / Printed in Mexico



MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Recuerda que si consideramos una recta en la que señalamos un punto 0 como origen. La dividimos hacia la derecha y hacia la izquierda en partes iguales. Cada una de estas partes representa el segmento unidad.

Los enteros positivos los situamos a la derecha del origen 0, y los enteros negativos a la izquierda de dicho punto.



Para multiplicar dos o más números enteros, aplicamos la regla de los signos, y procedemos a multiplicar los valores absolutos de los factores.

Leyes de los signos de multiplicación:

+	por	+	=	+	más por más igual a más
-	por	-	=	+	menos por menos igual a más
+	por	-	=	-	más por menos igual a menos
-	por	+	=	-	menos por más igual a menos

Ejemplos:

$$\begin{aligned} (+8)(+4) &= +32 \\ (-1)(-9) &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+6)(-5) &= -30 \\ (-2)(+5) &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-7)(+3) &= -21 \\ (+9)(-4) &= -36 \end{aligned}$$

Ejercicios:

Resuelve las siguientes multiplicaciones:

a) $(-9)(-5) = 45$

e) $(12)(-6) = -72$

i) $(-5)(0) = 0$

b) $(-72)(-9) = 648$

f) $(-13.6)(4.1) = -55.76$

j) $(-56)(8) = -448$

c) $(5)(-4) = -20$

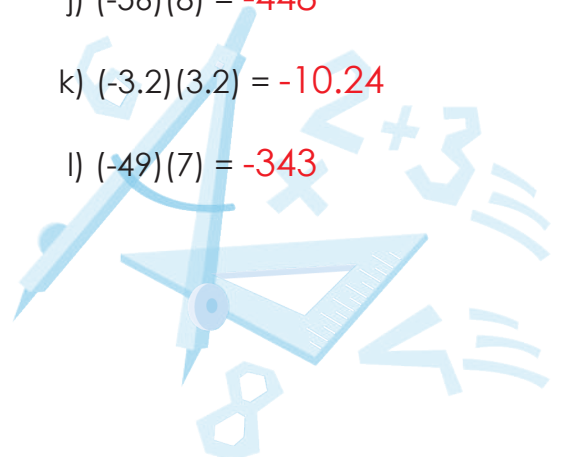
g) $(72)(9) = 648$

k) $(-3.2)(3.2) = -10.24$

d) $(-48)(-6) = 288$

h) $(2)(5)(4) = 40$

l) $(-49)(7) = -343$



Encuentra el número que falta en cada caso.

a) $(-7)(-8) = 56$

e) $(8.2)(-1) = -8.2$

b) $(13)(-1) = -13$

f) $(18)(-4.5) = -81$

c) $(-5)(-26) = 130$

g) $(24)(2.33) = 56$

d) $(-34)(-93) = 3\ 162$

h) $(-46)(97) = -4\ 462$

DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La división es la operación recíproca de la multiplicación donde conociendo el producto de dos factores (dividendo) y uno de ellos (divisor) debemos encontrar el otro factor (cociente) es decir, se divide el dividendo entre el divisor y se aplica la regla de los signos. Una división es exacta cuando el resto es 0.

Ejemplos:

Si se dividen dos números de igual signo el cociente es positivo.

$$(+8) \div (+2) = +4$$

$$(-6) \div (-3) = +2$$

Porque $(+2)(+4) = +8$

Porque $(-3)(+2) = -6$

Si se dividen dos números de diferente signo el cociente es negativo.

$$(+12) \div (-3) = -4$$

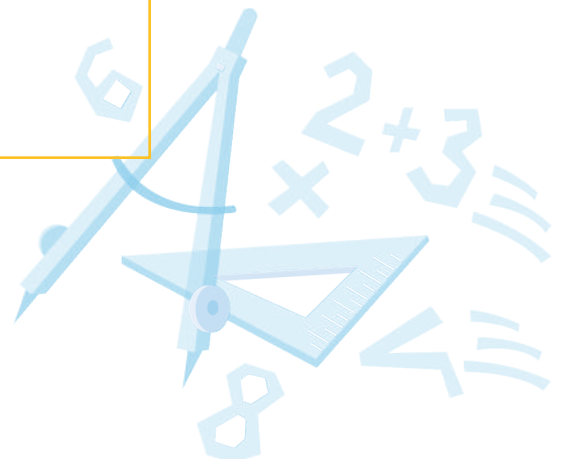
$$(-24) \div (+4) = -6$$

Porque $(-4)(-3) = +12$

Porque $(+4)(-6) = -24$

Leyes de los signos de la división:

+	entre	+	=	+
-	entre	-	=	+
+	entre	-	=	-
-	entre	+	=	-



Ejemplos:

$$\frac{+12}{+3} = +4$$

$$\frac{-12}{-3} = +4$$

$$\frac{+12}{-3} = -4$$

$$\frac{-12}{+3} = -4$$

Ejercicio:

Resuelve las siguientes divisiones de números enteros.

$$\frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{-64}{-8} = 8$$

$$\frac{81}{-3} = -27$$

$$\frac{-99}{99} = -1$$

$$\frac{48}{8} = 6$$

$$\frac{15}{-3} = -5$$

$$\frac{18}{-7} = -2.57$$

$$\frac{-120}{40} = -3$$

$$\frac{49}{3} = 16.33$$

$$\frac{-18}{2} = -9$$

$$\frac{27}{9} = 3$$

$$\frac{-10}{-10} = 1$$

$$\frac{-72}{-3} = 24$$

$$\frac{1\ 350}{18} = 75$$

$$\frac{96}{-4} = -24$$

$$\frac{-1}{3} = -0.33$$

$$\frac{14}{-2} = -7$$

$$\frac{-72}{-9} = 8$$

$$\frac{-81}{1} = -81$$

$$\frac{91}{7} = 13$$

$$\frac{-242}{22} = -11$$

$$\frac{36}{-4} = -9$$

$$\frac{9}{18} = 0.5$$

$$\frac{-34}{-2} = 17$$

$$\frac{180}{12} = 15$$

$$\frac{162}{-30} = -5.4$$

$$\frac{-299}{-23} = 13$$

$$\frac{-1\ 288}{46} = -28$$

$$\frac{-18}{-7} = 2.57$$

$$\frac{32}{3} = 10.66$$

$$\frac{1\ 036}{-74} = -14$$

$$\frac{-132}{11} = -12$$

Ejercicio:

Completa con los números enteros correspondientes.

1. $(7)(-7) = -49$

2. $(-9)(-7) = 63$

3. $(8)(-7) = -56$

4. $(-11)(11) = -121$

7. $(10)(-23) = -230$

8. $(-2)(-2)(-2) = -8$

9. $(1)(-1)(1)(-1)(-1)(-1) = 1$

10. $(-3)(-1)(-2)(1) = -6$

5. $(-45)(-1) = 45$

11. $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$

6. $(345)(0) = 0$

12. $(-1)(-1)(1)(-1)(-1)(-1) = -1$

Completa con los números enteros correspondientes.

1. $(42) \div (-6) = -7$

7. $(-20) \div (1) = -20$

2. $(-8) \div (-8) = 1$

8. $(-30) \div (-6) = 5$

3. $(-54) \div (-9) = 6$

9. $(9) \div (-1) = -9$

4. $(27) \div (-9) = -3$

10. $(560) \div (16) = 35$

5. $(-1\ 083) \div (-19) = 57$

11. $(49) \div (-7) = -7$

6. $(-35) \div (5) = -7$

12. $(455) \div (-13) = -35$

Completa con los números enteros correspondientes.

x	-2	12	-10	-9	23	47
8	-16	96	-80	-72	184	376
-9	18	-108	90	81	-207	-423
10	-20	120	-100	-90	230	470
-26	52	-312	260	234	-598	-1222
-18	36	-216	180	162	-414	-846
7	-14	84	-70	-63	161	329
-14	28	-168	140	126	-322	-658
32	-64	384	-320	-288	736	1504

÷	24	-18	-12	36	54	-72
-1	-24	18	12	-36	-54	72
2	12	-9	-6	18	27	-36
-3	-8	6	4	-12	-18	24
6	4	-3	-2	6	9	-12
3	8	-6	-4	12	18	-24
-6	-4	3	2	-6	-9	12
-2	-12	9	6	-18	-27	36
1	24	-18	-12	36	54	-72

Los siguientes problemas escríbelos como producto o como cociente de números enteros y resuélvelos:

1. Marina y Juan pescan juntos en un lago. El anzuelo de Juan se halla a -2 m con respecto al nivel del lago. El anzuelo de Marina se halla sumergido tres veces más que el de Juan. ¿A qué profundidad se halla el anzuelo de Marina?

R = $-2(3) = -6$ m. más abajo

2. Ana gasta \$ 555 al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 3 meses?

R = $\$555(3) = \$ 1\ 665$



3. En la tarjeta de débito hay un saldo inicial de \$ 200; se cargan 5 retiros de \$ 150. ¿Cuál es el nuevo saldo?

$$R = \$200 - \$150(5) = \$200 - \$750 = - \$550$$

4. El ascensor baja los sótanos de 2 en 2. Después de tres paradas en su camino descendente, desde la planta baja, ¿En qué sótano está?

$$R = 2(3) = 6, \text{ está en el sexto sótano}$$

5. Si tuviera el doble de la deuda que tengo, mi saldo sería – \$ 2 700. ¿Cuál es el número que figura en mi balance?

$$R = x = \text{deuda} \quad ; \quad 2x = -\$2\,700 \quad ; \quad x = -\$2\,700/2 \quad ; \quad x = -\$1\,350$$

6. Leonor tiene una deuda de – \$ 57 054 en una tarjeta de crédito, pero un amigo le propone que le presta dinero para liquidar al banco, pero le cobrará 150 pesos por mes de intereses y lo tiene que liquidar en un año. ¿Cuánto pagará de intereses? ¿Cuánto tendrá que pagarle de mensualidad a su amigo con todo e intereses?

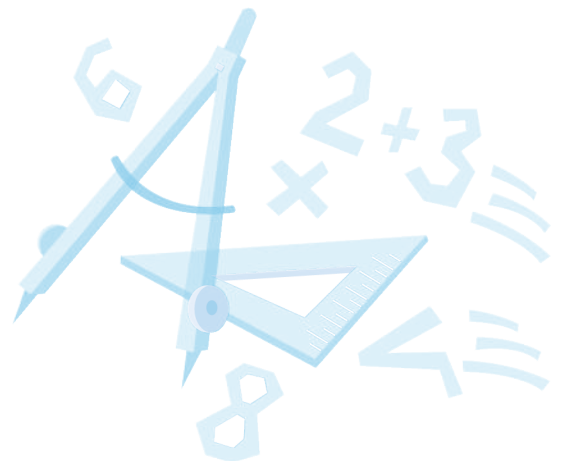
$$R = \text{Intereses} = \$150 \times 12 = \$1800 \text{ y la mensualidad} = (\$57054 \div 12) + 150 = \$4904.5$$

7. Las temperaturas de una comunidad de Chihuahua en la semana fueron de: lunes – 11°, martes – 9°, miércoles – 5°, jueves – 2°, viernes – 1°, sábado 2° y domingo 5°. ¿Cuál fue el promedio de las temperaturas de toda la semana?

$$R = \text{El promedio fue de } -3^{\circ}\text{C}$$

8. El área de un rectángulo cuyas medidas son de largo $7m^2n^5 + 3m^5n^2 - 9m^2n^7$ y de ancho $9m^4n^7 - 7m^7n^7$ es:

$$R = (7m^2n^5 + 3m^5n^2 - 9m^2n^7)(9m^4n^7 - 7m^7n^7) \\ 63m^6n^{12} - 49m^9n^{12} + 27m^9n^9 - 21m^{12}n^9 - 81m^6n^{14} + 63m^9n^{14}$$



REDUCCIÓN DE TÉRMINOS ALGEBRAICOS

En una expresión algebraica se llaman **términos semejantes** a todos aquellos términos que tienen **igual la parte literal**, es decir, a aquellos términos que tienen **igual la o las literales e iguales exponentes**. Por ejemplo:

$6a^2b^3$ es término semejante con $-2a^2b^3$ porque ambos términos tienen la misma parte literal (a^2b^3)

$3x^5yz$ es término semejante con $5x^5yz$ porque ambos términos tienen la misma parte literal (x^5yz)

$0.3a^2c$ no es término semejante con $4ac^2$ porque los exponentes de las literales no son iguales.

Reducir términos semejantes significa **sumar o restar los coeficientes numéricos** en una expresión algebraica, que tengan la misma parte literal.

Para desarrollar un ejercicio de este tipo, se suman o restan los coeficientes numéricos y se **conserva la misma parte literal**. Ejemplos:

$$5x - 7x - 2x + 6x = 11x - 9x = 2x$$

$$xy^3 - 3x^2y + 5xy^3 - 12x^2y + 6 = 6xy^3 - 15x^2y + 6$$

Ejercicio:

Reduce los siguientes términos semejantes:

1) $2a - 7a = -5a$

2) $-7m - 8m = -15m$

3) $8x + 9x = 17x$

4) $-8b - 8b = -16b$

5) $12a - 34a = -22a$

6) $-2m - 7m = -9m$

7) $7x + 6x = 13x$

8) $-4b - 8b = -12b$

9) $9a - 4a = 5a$

10) $-9m - 9m = -18m$

11) $-4m^5n^7 - 7m^5n^7 = -11m^5n^7$

12) $-35x^8y^3 - 34x^8y^3 = -69x^8y^3$

13) $-38d^2e^4f + 25d^2e^4f = -13d^2e^4f$

14) $67x^8y^3z + 98x^8y^3z = 165x^8y^3z$

15) $29g - 23g = 6g$

16) $-4q^8 + 10q^8 = 6q^8$

17) $9x^2y - 3x^2y = 6x^2y$

18) $5c^2 - 9c^2 + 8c^2 = 13c^2 - 9c^2 = 4c^2$

19) $-8k^2x^3 - 9k^2x^3 - 3k^2x^3 = -20k^2x^3$

20) $4h - 8h - 2h = 4h - 10h = -6h$

21) $5abc^2 + 9abc^2 + 8abc^2 = 22abc^2$

22) $-27xyz - 54xyz = -81xyz$

23) $9a^3b^5 - 6a^3b^5 = 3a^3b^5$

24) $-9x^2y^6 - 9x^2y^6 = -18x^2y^6$

25) $12abc + 4abc = 16abc$

26) $-18m^2n^5 - 18m^2n^5 = -36m^2n^5$

27) $-54abc - 32abc = -86abc$

28) $-7f^8 - 9f^8 = -16f^8$

29) $-7c^9d - 8c^9d = -15c^9d$

30) $2b + 7b - 5b = 9b - 5b = 4b$

31) $-7gm - 8gm - 7gm = -22gm$

32) $7a - 9a - 4a = 7a - 13a = -6a$

33) $-2hx - 2hx - 2hx = -6hx$

34) $9r + 2r - 5r = 11r - 5r = 6r$

$$35) -10m^2n^3 + 5m^2n^3 - 7m^2n^3 = 5m^2n^3 - 17m^2n^3 = \underline{-12m^2n^3}$$

$$36) 4p^7 - 5p^7 - 10p^7 = 4p^7 - 15p^7 = \underline{-11p^7}$$

$$37) 8x^4y^5z^6 - 5x^4y^5z^6 + 7x^4y^5z^6 = 15x^4y^5z^6 - 5x^4y^5z^6 = \underline{10x^4y^5z^6}$$

$$38) 4df^2 - 8df^2 + 12df^2 = 16df^2 - 8df^2 = \underline{8df^2}$$

$$39) 2a + 10a - 17a = 12a - 17a = \underline{-5a}$$

$$40) -5a - 12a + 24a = 24a - 17a = \underline{7a}$$

$$41) 3p^6q^7 + 2p^6q^7 - 9p^6q^7 = 5p^6q^7 - 9p^6q^7 = \underline{-4p^6q^7}$$

$$42) -9bc - 9bc + 12bc = 12bc - 18bc = \underline{-6bc}$$

$$43) -4s^7t^4 + 2s^7t^4 - 5s^7t^4 = 2s^7t^4 - 9s^7t^4 = \underline{-7s^7t^4}$$

$$44) -2x^2y^3 - 2x^2y^3 + 8x^2y^3 = -4x^2y^3 + 8x^2y^3 = \underline{4x^2y^3}$$

$$45) -7a^4b^5c^6 - 3a^4b^5c^6 + 9a^4b^5c^6 = -10a^4b^5c^6 + 9a^4b^5c^6 = \underline{-a^4b^5c^6}$$

$$46) -5m^2n^3 - 3m^2n^3 + 9m^2n^3 = -8m^2n^3 + 9m^2n^3 = \underline{m^2n^3}$$

$$47) -3y^3 + 2y^3 - 9y^3 = -12y^3 + 2y^3 = \underline{-10y^3}$$

$$48) 2x + 3x - 11x = 5x - 11x = \underline{-6x}$$

$$49) -d^4e^5f^6 - d^4e^5f^6 + d^4e^5f^6 = -2d^4e^5f^6 + d^4e^5f^6 = \underline{-d^4e^5f^6}$$

$$50) -2m^2n^3 - 9m^2n^3 + 15m^2n^3 = -11m^2n^3 + 15m^2n^3 = \underline{4m^2n^3}$$

$$51) -6k^2x^3 + 19k^2x^3 - 7k^2x^3 = -13k^2x^3 + 19k^2x^3 = \underline{6k^2x^3}$$

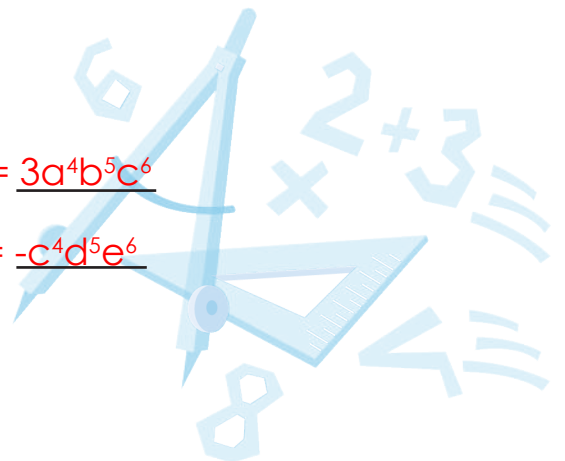
$$52) -8s^7t^4 + 3s^7t^4 - 9s^7t^4 = -17s^7t^4 + 3s^7t^4 = \underline{-14s^7t^4}$$

$$53) 6ac + 7ac - 15ac = 13ac - 15ac = \underline{-2ac}$$

$$54) -4x^2y^3 - 7x^2y^3 + 5x^2y^3 = -11x^2y^3 + 5x^2y^3 = \underline{-6x^2y^3}$$

$$55) -2a^4b^5c^6 - 2a^4b^5c^6 + 7a^4b^5c^6 = -4a^4b^5c^6 + 7a^4b^5c^6 = \underline{3a^4b^5c^6}$$

$$56) -2c^4d^5e^6 - 4c^4d^5e^6 + 5c^4d^5e^6 = -6c^4d^5e^6 + 5c^4d^5e^6 = \underline{-c^4d^5e^6}$$



ADICIÓN ALGEBRAICA

$$x + x + x + x = 4x$$

$$2x + 3x - x - 8x + 2x = -2x$$

Se suman algebraicamente los coeficientes de los términos semejantes

Cuando se suma de forma horizontal se buscan los términos semejantes y se reducen:

$$2a + 3a - 2b - 4a - 3b = a - 5b$$

$$5mn - 7mn^2 - 8m^2n - 9mn^2 + 3mn + 9m^2n = 8mn - 16mn^2 + m^2n$$

Cuando se trata de una adición de polinomios, puedes colocar los sumandos uno abajo del otro, procurando que los términos semejantes queden en columna.

$$(m^4 + 4m^3n - 5n^2) + (-6m^4 - 2m^3n + 4n^2) + (3m^4 + 3m^3n - 8n^2) =$$

$$\begin{array}{r} m^4 + 4m^3n - 5n^2 \\ -6m^4 - 2m^3n + 4n^2 \\ \hline 3m^4 + 3m^3n - 8n^2 \\ -2m^4 + 5m^3n - 9n^2 \end{array}$$

Y se suman algebraicamente los coeficientes

Ejercicio:

1. Resuelve las siguientes adiciones:

a) $(6m^6 + 7n^5) + (8m^6 - 2n^5) + (7m^6 - 4n^5) = 21m^6 + n^5$

b) $(2ab + 18c - 32) + (18ab - 13c + 5d - 123) = 20ab + 5c + 5d - 155$

c) $(3x + 2) + (2x + 1) + (3x + 2) + (2x + 1) = 10x + 6$

d) $(18a + 3a - 2b) - (3a + 5a - 3b) = 18a + 3a - 2b - 3a - 5a + 3b = 13a + b$

e) $(20a - 3b + 3c) - (18a + 12b - 5c) = 20a - 3b + 3c - 18a - 12b + 5c = 2a - 15b + 8c$



2. Relaciona las dos columnas anotando dentro del paréntesis la letra que corresponda a la respuesta.

(F) $5x + 4x$

(D) $3x + 7x - 5x$

(H) $6x - 8x + 3x$

(A) $4x^2 + 3x^2 + x^2$

(J) $2x^2 + 5x^2 - 4x^2$

(I) $3x + 4x - 9x$

(C) $6x + 3y - 2x + 2y$

(G) $8x + 3y + 5x + 7y$

(B) $4x + 8x - 7y + 5y$

(E) $9y - 7x + 5y + 6x$

A) $8x^2$

B) $12x - 2y$

C) $4x + 5y$

D) $5x$

E) $-x + 14y$

F) $9x$

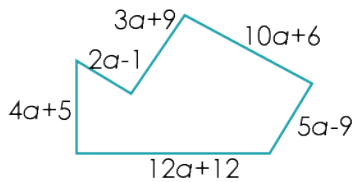
G) $13x + 10y$

H) x

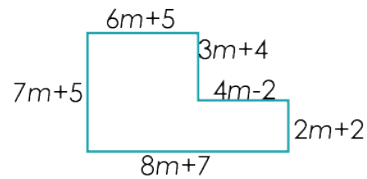
I) $-2x$

J) $3x^2$

3. Obtén el perímetro de las siguientes figuras.



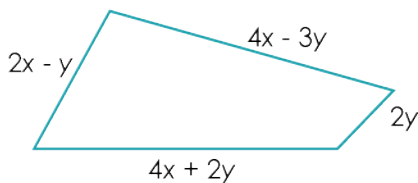
$$P = 36a + 22$$



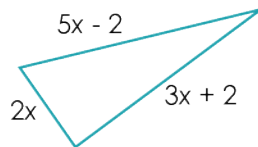
$$P = 30m + 21$$



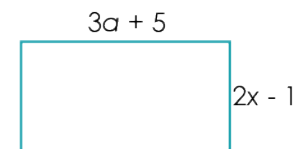
$$P = 42ay + 14$$



$$P = 10x$$



$$P = 10x$$

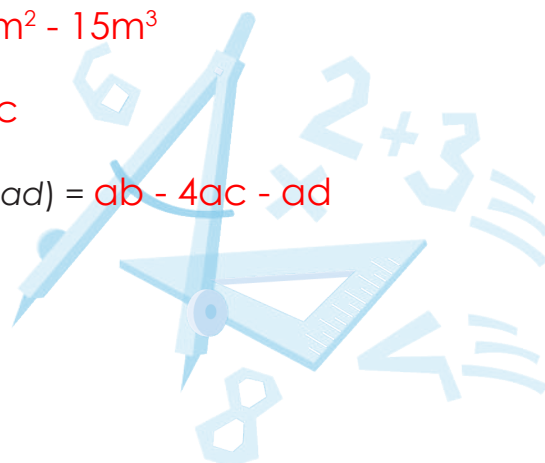


$$P = 4x + 6a + 8$$



4. Resuelve las siguientes adiciones algebraicas.

- 1) $6c^2 - 7c + 7c^2 = 13c^2 - 7c$
- 2) $5y + 8x - 7y = 8x - 2y$
- 3) $2x + 8x - 8y = 10x - 8y$
- 4) $2x + x + 8xy = 3x + 8xy$
- 5) $6m + 8n - 7n = 6m + n$
- 6) $4x^2 + 7a^4 - 2x^2 = 2x^2 + 7a^4$
- 7) $2x^2 + 8x^2 - 9x^4 = 10x^2 - 9x^4$
- 8) $-7a + 8b - 5a = -12a + 8b$
- 9) $-7a^8 - 10q^8 + 9q^8 = -7a^8 - q^8$
- 10) $9a + 9b - 5c = 9a + 9b - 5c$
- 11) $2b + 7a + 5c = 7a + 2b + 5c$
- 12) $6m + 6m - 9mn = 12m - 9mn$
- 13) $9al + 6ajkl - 2ajkl = 9al + 4ajkl$
- 14) $-15p^7 - 3q^7 + 10q^7 = -15p^7 + 7q^7$
- 15) $-14y^2z - 9x^2y + 3y^2z = -9x^2y - 11y^2z$
- 16) $-10s^6t^2 - 9s^7t^4 + 7s^7t^4 = -10s^6t^2 - 2s^7t^4$
- 17) $-6k^2x^3 + 5k^3x^2 - 9k^2x^3 = -15k^2x^3 + 5k^3x^2$
- 18) $2p^6q^7 - 9p^2q^2 + 7p^6q^7 = 9p^6q^7 - 9p^2q^2$
- 19) $2p^6q^7 - 7p^6q^7 + 9p^2q = -5p^6q^7 + 9p^2q$
- 20) $5abc + 8bcd - 8abc = -3abc + 8bcd$
- 21) $2x + 3y - 7x + 7x - 8y + 7x - 2y + 4y - 5x - 3x = x - 3y$
- 22) $-7ab + 2ya^6b - 7ya^6z + 3ya^6b - 4ya^6z - 2ya^6z + 2a^6b - 8ab = -15ab + 5ya^6b - 13ya^6z + 2a^6b$
- 23) $-9s^6t^2 + 2s^6t^2 + 8s^7t^4 - 5s^7t^4 - 10s^6t^2 - 9s^7t^4 + 7s^7t^4 = -17s^6t^2 + s^7t^4$
- 24) $6a^2b^5c^3 + 9b^3c^7d^3 - 9a^2b^5c^3 + 8b^3c^7d^3 + 3b^3c^7d^3 = -3a^2b^5c^3 + 20b^3c^7d^3$
- 25) $-2x^2y^3z^4 - 4x^4y^5z^6 + 5x^4y^5z^6 - 2x^2y^3z^4 - 3x^2y^3z^4 + 6x^4y^5z^6 = -7x^2y^3z^4 + 7x^4y^5z^6$
- 26) $-6a^4b^5c^6 - 2a^4b^3c^6 - 4a^4b^5c^6 + 5a^4b^3c^6 - 2a^4b^5c^6 = -12a^4b^5c^6 + 3a^4b^3c^6$
- 27) $-7h + 9h^2 - 7h^2 - 4h - 5h + 8h^2 = -16h + 10h^2$
- 28) $7ac + 2ad + 6ad + 6ac = 13ac + 8ad$
- 29) $9ab^4c^2 - 3ab^4 - 7ab^4c^2 + 2ab^4 - 2ab^4c^2 + 6ab^4 = 5ab^4$
- 30) $3bc^6 - 3bc^6 - 4ab^6 - 4bc^6 - 4ab^6 + 5bc^6 = bc^6 - 8ab^6$
- 31) $7m + 5m^2 - 7m^3 - 8m - 6m^3 - 7m^2 + 13m - 2m^3 = 12m - 2m^2 - 15m^3$
- 32) $(7a + 5b - 7c) + (-9a - 2b + 6c) + (2a + 2b - 3c) = 5b - 4c$
- 33) $(7ab + 2ac + 6ad) + (-9ab - 3ac - 4ad) + (3ab - 3ac - 3ad) = ab - 4ac - ad$



$$34) (3a - 6a^2 + 8a^3 - 6a^4) + (-2a + 2a^4 - 3a^2 + 3a^3) + (8a - 4a^2 + 2a^3 - a^4) =$$

$$9a - 13a^2 + 13a^3 - 5a^4$$

$$35) (ab - abc - abcd) + (-ab - abc - abcd) + (-ab + abc - abad) =$$

$$-ab - abc - 2abcd - abad$$

$$36) \begin{array}{r} 2a^2b^5c^3 + 4b^3c^7d^3 - 5a^2b^3c^4 \\ -5a^2b^5c^3 - 9b^3c^7d^3 + 3a^2b^3c^4 \\ -6a^2b^5c^3 - 3b^3c^7d^3 + 4a^2b^3c^4 \\ \hline -9a^2b^5c^3 - 8b^3c^7d^3 + 2a^2b^3c^4 \end{array}$$

$$37) \begin{array}{r} -7s^6t^2 - 2s^7t^4 + 9s^2t^2 \\ 2s^6t^2 - 5s^7t^4 - 5s^2t^2 \\ -3s^6t^2 + 2s^7t^4 + 4s^2t^2 \\ \hline -8s^6t^2 - 5s^7t^4 + 8s^2t^2 \end{array}$$

$$38) \begin{array}{r} 2a + 4b - 5c + 8d \\ 4a - 9b - 7c + 4d \\ -2a + 4b + 6c - 7d \\ -9a - 7b - 6c + 7d \\ \hline -5a - 8b - 12c + 12d \end{array}$$

$$39) \begin{array}{r} 7a^4b^5 - 2b^3d^6 - 6b^2c^4 \\ -2a^4b^5 - 4b^3d^6 + 2b^2c^4 \\ 8a^4b^5 - 2b^3d^6 + 4b^2c^4 \\ \hline 13a^4b^5 - 8b^3d^6 \end{array}$$

$$40) \begin{array}{r} 2x - 7y + 6z + 2x^2 \\ -4x + 8y - 9z - 9x^2 \\ -3x - 9y - 5z - 3x^2 \\ 2x + 6y + 4z + 3x^2 \\ \hline -3x - 2y - 4z - 7x^2 \end{array}$$

$$41) \begin{array}{r} 4m^6n^2 - 2n^7q^4 + 2r^2w^2 \\ -8m^6n^2 - 4n^7q^4 - 5r^2w^2 \\ 5m^6n^2 - 3n^7q^4 + 3r^2w^2 \\ \hline m^6n^2 - 9n^7q^4 \end{array}$$



SUSTRACCIÓN ALGEBRAICA

Esta operación se efectúa de igual manera que la adición, pero sumando a los términos del minuendo el inverso aditivo de los términos del sustraendo.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Inverso aditivo} & \\ & \text{del sustraendo} & \\ 6m & - & (7m) = 6m - 7m = -m \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{Minuendo} & \text{Sustraendo} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Inverso aditivo} & \\ & \text{del sustraendo} & \\ -3m & - & (-9m) = -3m + 9m = 6m \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{Minuendo} & \text{Sustraendo} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Inverso aditivo} & \\ & \text{del sustraendo} & \\ (4c^2 - 3d^2 + cd) & - & (5c^2 - 2d^2 - 2cd) \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{Minuendo} & \text{Sustraendo} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Inverso aditivo} & \\ & \text{del sustraendo} & \\ (-5m^7 - 4n^3q + 7xy^2) & - & (5m^7 + 7n^3q + 2xy^2) \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{Minuendo} & \text{Sustraendo} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4c^2 - 3d^2 + cd \\ -5c^2 + 2d^2 + 2cd \\ \hline -c^2 - d^2 + 3cd \end{array} \quad \text{Inverso aditivo del sustraendo}$$

$$\begin{array}{r} -5m^7 - 4n^3q + 7xy^2 \\ -5m^7 - 7n^3q - 2xy^2 \\ \hline -10m^7 - 11n^3q + 5xy^2 \end{array} \quad \text{Inverso aditivo del sustraendo}$$

Ejercicio:

1. Relaciona las dos columnas anotando dentro del paréntesis la letra que corresponda a la respuesta.

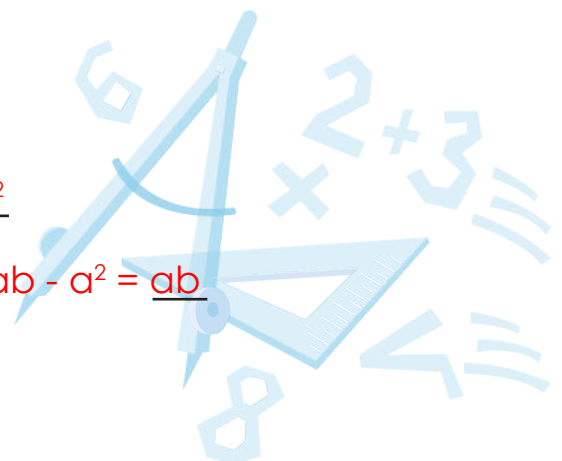
- (C) $8m - (-5m) =$
 (A) $2m - (7m) =$
 (I) $(4m + 2n) - (5m + 4n) =$
 (H) $(3m + 2n) - (6m - 4n) =$
 (K) $(2m - 5n) - (-3m + 2n) =$
 (J) $(8m - 3n) - (5m - 4n) =$
 (E) $(2m + 3n) - (3m + 4n) =$
 (D) $(7m - 5n) - (-5m + 5n) =$
 (F) $(4m + 3n) - (2m - 5n) =$
 (B) $(6m + 5n) - (-3m + 8n) =$

- A) $-5m$
 B) $9m - 3n$
 C) $13m$
 D) $12m - 10n$
 E) $-m - n$
 F) $2m + 8n$
 G) $2m$
 H) $-3m + 6n$
 I) $-m - 2n$
 J) $3m + n$
 K) $5m - 7n$

2. Resuelve las siguientes sustracciones.

a) $(m^2 - 7mn + 6n^2) - (-2m^2 - 3mn - 7n^2) =$
 $m^2 - 7mn + 6n^2 + 2m^2 + 3mn + 7n^2 = \underline{3m^2 - 4mn + 13n^2}$

b) $(a^2 - 2ab + b^2) - (b^2 - 3ab + a^2) = a^2 - 2ab + b^2 - b^2 + 3ab - a^2 = \underline{ab}$



$$c) (4y^2 - 3z^2 + yz) - (4y^2 - 2z^2 - 2yz) = 4y^2 - 3z^2 + yz - 4y^2 + 2z^2 + 2yz = \underline{-z^2 + 3yz}$$

$$d) (a^2 - 7ab + 6b^2) - (6a^2 + 9ab - 2b^2) = a^2 - 7ab + 6b^2 - 6a^2 - 9ab + 2b^2 = \underline{-5a^2 - 16ab + 8b^2}$$

$$e) (x^2 - 2xy + y^2) - (y^2 - 3xy + x^2) = x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + 3xy - x^2 = \underline{xy}$$

$$f) (4c^2 - 3d^2 + cd) - (4c^2 - 2d^2 - 2cd) = 4c^2 - 3d^2 + cd - 4c^2 + 2d^2 + 2cd = \underline{-d^2 + 3cd}$$

$$g) (7ab + 18c - 32) - (18ab - 8c + 7e - 12) = 7ab + 18c - 32 - 18ab + 8c - 7e + 12 = \underline{-11ab + 26c - 7e - 20}$$

$$h) (3x + 2m + 2z + 1) - (3x + 2z + 5m + 9) = 3x + 2m + 2z + 1 - 3x - 2z - 5m - 9 = \underline{-3m - 8}$$

$$i) (18a + 3a^3 - 2b) - (3a + 5a^3 - 3b) = 18a + 3a^3 - 2b - 3a - 5a^3 + 3b = \underline{15a - 2a^3 + b}$$

$$j) (3x + 2y + 5z) - (8x + 2y + 3z) = 3x + 2y + 5z - 8x - 2y - 3z = \underline{-5x + 2z}$$

3. Resuelve las siguientes diferencias.

$$1) 2c - (7c) = 2c - 7c = \underline{-5c}$$

$$2) 5c^2 - (8c^2) = 5c^2 - 8c^2 = \underline{-3c^2}$$

$$3) 8mn - (7mn) = 8mn - 7mn = \underline{mn}$$

$$4) xyz - (9xyz) = xyz - 9xyz = \underline{-8xyz}$$

$$5) 7ab - (-8ab) = 7ab + 8ab = \underline{15ab}$$

$$6) -8h - (-2h) = -8h + 2h = \underline{-6h}$$

$$7) -10q^8 - (9q^8) = -10q^8 - 9q^8 = \underline{-19q^8}$$

$$8) -2ad - (-5ad) = -2ad + 5ad = \underline{3ad}$$

$$9) -6g - (7g) = -6g - 7g = \underline{-13g}$$

$$10) 5x^2y - (3x^2y) = 5x^2y - 3x^2y = \underline{2x^2y}$$

$$11) 3xy^2 - (-9xy^2) = 3xy^2 + 9xy^2 = \underline{12xy^2}$$

$$12) 10a - (-12a) = 10a + 12a = \underline{22a}$$

$$13) -gh - (3gh) = -gh - 3gh = \underline{-4gh}$$

$$14) -7a - (-4a) = -7a + 4a = \underline{-3a}$$

$$15) -12a - (24a) = -12a - 24a = \underline{-36a}$$

$$16) w - (9w) = w - 9w = \underline{-8w}$$

$$17) 8d - (4d) = 8d - 4d = \underline{4d}$$

$$18) 6c^2 - (9c^2) = 6c^2 - 9c^2 = \underline{-3c^2}$$

$$19) -2h - (-8h) = -2h + 8h = \underline{6h}$$

$$20) -2g - (g) = -2g - g = \underline{-3g}$$

$$21) 24a - (-36a) = 24a + 36a = \underline{60a}$$

$$22) 6xyz - (9xyz) = 6xyz - 9xyz = \underline{-3xyz}$$

$$23) 9ab - (-8ab) = 9ab + 8ab = \underline{17ab}$$

$$24) -3gh - (8gh) = -3gh - 8gh = \underline{-11gh}$$

$$25) 6xy^2 - (-5xy^2) = 6xy^2 + 5xy^2 = \underline{11xy^2}$$

$$26) -3ad - (-2ad) = -3ad + 2ad = \underline{-ad}$$

$$27) -9q^8 - (13q^8) = -9q^8 - 13q^8 = \underline{-22q^8}$$

$$28) -3x^2y - (9x^2y) = -3x^2y - 9x^2y = \underline{-12x^2y}$$

$$29) abc - (-abc) = abc + abc = \underline{2abc}$$

$$30) -8s^7t^4 - (3s^7t^4) = -8s^7t^4 - 3s^7t^4 = \underline{-11s^7t^4}$$

$$31) 6ajkl - (-2ajkl) = 6ajkl + 2ajkl = \underline{8ajkl}$$

$$32) -8ad - (-3ad) = -8ad + 3ad = \underline{-5ad}$$

$$33) -14y^2z - (3y^2z) = -14y^2z - 3y^2z = \underline{-17y^2z}$$

$$34) -23p^7 - (-17p^7) = -23p^7 + 17p^7 = \underline{-6p^7}$$

$$35) -15p^7 - (-10p^7) = -15p^7 + 10p^7 = \underline{-5p^7}$$

$$36) -7df^2 - (12df^2) = -7df^2 - 12df^2 = \underline{-19df^2}$$

$$37) -9bc - (12bc) = -9bc - 12bc = \underline{-21bc}$$

$$38) -6k^2x^3 - (7k^2x^3) = -6k^2x^3 - 7k^2x^3 = \underline{-13k^2x^3}$$

$$39) -9ad - (-11ad) = -9ad + 11ad = \underline{2ad}$$

$$40) 2p^6q^7 - (7p^6q^7) = 2p^6q^7 - 7p^6q^7 = \underline{-5p^6q^7}$$

$$41) -9mn - (-3mn) = -9mn + 3mn = \underline{-6mn}$$

$$42) -14df^2 - (28df^2) = -14df^2 - 28df^2 = \underline{-42df^2}$$

$$43) -10ab - (10ab) = -10ab - 10ab = \underline{-20ab}$$

$$44) 8abc - (-9abc) = 8abc + 9abc = \underline{17abc}$$

$$45) -6k^2x^3 - (-19k^2x^3) = -6k^2x^3 + 19k^2x^3 = \underline{13k^2x^3}$$

$$46) 5x^4y^5z^6 - (9x^4y^5z^6) = 5x^4y^5z^6 - 9x^4y^5z^6 = \underline{-4x^4y^5z^6}$$

$$47) 9m^2n^3 - (-9m^2n^3) = 9m^2n^3 + 9m^2n^3 = \underline{18m^2n^3}$$

$$48) -2m^2n^3 - (-9m^2n^3) = -2m^2n^3 + 9m^2n^3 = \underline{7m^2n^3}$$

$$49) 12m^2n^3 - (-9m^2n^3) = 12m^2n^3 + 9m^2n^3 = \underline{21m^2n^3}$$

$$50) 10m^2n^3 - (-5m^2n^3) = 10m^2n^3 + 5m^2n^3 = \underline{15m^2n^3}$$

$$51) -8x^4y^5z^6 - (3x^4y^5z^6) = -8x^4y^5z^6 - 3x^4y^5z^6 = \underline{-11x^4y^5z^6}$$

$$52) (7a + 5b - 7c) - (-9a - 2b + 6c) = 7a + 5b - 7c + 9a + 2b - 6c = \underline{16a + 7b - 13c}$$

$$53) (-9ab - 3ac - 4ad) - (3ab - 3ac - 3ad) = \\ -9ab - 3ac - 4ad - 3ab + 3ac + 3ad = \underline{-12ab - ad}$$

$$54) (-2a + 2a^4 - 3a^2 + 3a^3) - (8a - 4a^2 + 2a^3 - a^4) = \\ -2a + 2a^4 - 3a^2 + 3a^3 - 8a + 4a^2 - 2a^3 + a^4 = \underline{-10a + a^2 + a^3 + 3a^4}$$

$$55) (-ab - abc - abcd) - (-ab + abc - abcd) = \\ -ab - abc - abcd + ab - abc + abcd = \underline{-2abc}$$

$$56) (3ab^4c^2 - 9ab^4 - 6a^2b^4c^2) - (-6ab^4c^2 + 4ab^4 + 9a^2b^4c^2) = \\ 3ab^4c^2 - 9ab^4 - 6a^2b^4c^2 + 6ab^4c^2 - 4ab^4 - 9a^2b^4c^2 = \underline{9ab^4c^2 - 13ab^4 - 15a^2b^4c^2}$$

$$57) (-7s^6t^2 - 9s^7t^4 - 3s^2t^2) - (-9s^6t^2 + 5s^7t^4 + 8s^2t^2) = \\ -7s^6t^2 - 9s^7t^4 - 3s^2t^2 + 9s^6t^2 - 5s^7t^4 - 8s^2t^2 = \underline{2s^6t^2 - 14s^7t^4 - 11s^2t^2}$$

$$58) (6a + 7b - 3c + 10d) - (9a - 7b + 4c - 6d) = \\ 6a + 7b - 3c + 10d - 9a + 7b - 4c + 6d = \underline{-3a + 14b - 7c + 16d}$$

$$59) (3a^4b^5 - 9b^3d^6 - 6b^2c^3) - (8a^4b^5 - 7b^3d^6 + 7b^2c^3) = \\ 3a^4b^5 - 9b^3d^6 - 6b^2c^3 - 8a^4b^5 + 7b^3d^6 - 7b^2c^3 = \underline{-5a^4b^5 - 2b^3d^6 - 13b^2c^3}$$

$$60) (-3m^6n^2 + 5n^7q^4 - 9r^2w^2) - (4m^6n^2 - 3n^7q^4 + 8r^2w^2) = \\ -3m^6n^2 + 5n^7q^4 - 9r^2w^2 - 4m^6n^2 + 3n^7q^4 - 8r^2w^2 = \underline{-7m^6n^2 + 8n^7q^4 - 17r^2w^2}$$

36)

$$\begin{array}{r} -5a^2b^5c^3 - 9b^3c^7d^3 + 3a^2b^3c^4 \\ -6a^2b^5c^3 - 3b^3c^7d^3 + 4a^2b^3c^4 \\ \hline -11a^2b^5c^3 - 12b^3c^7d^3 + 7a^2b^3c^4 \end{array}$$

37)

$$\begin{array}{r} 2s^6t^2 - 5s^7t^4 - 5s^2t^2 \\ -3s^6t^2 + 2s^7t^4 + 4s^2t^2 \\ \hline -s^6t^2 - 3s^7t^4 - s^2t^2 \end{array}$$

38)

$$\begin{array}{r} 2a + 4b - 5c + 8d \\ -9a - 7b - 6c + 7d \\ \hline -7a - 3b - 11c + 15d \end{array}$$

39)

$$\begin{array}{r} -2a^4b^5 - 4b^3d^6 + 2b^2c^4 \\ 8a^4b^5 - 2b^3d^6 + 4b^2c^4 \\ \hline 6a^4b^5 - 6b^3d^6 + 6b^2c^4 \end{array}$$

40)

$$\begin{array}{r} -3x - 9y - 5z - 3x^2 \\ 2x + 6y + 4z + 3x^2 \\ \hline -x - 3y - z \end{array}$$

41)

$$\begin{array}{r} -8m^6n^2 - 4n^7q^4 - 5r^2w^2 \\ 5m^6n^2 - 3n^7q^4 + 3r^2w^2 \\ \hline -3m^6n^2 - 7n^7q^4 - 2r^2w^2 \end{array}$$

Resuelve los siguientes problemas de adición y sustracción de monomios y polinomios

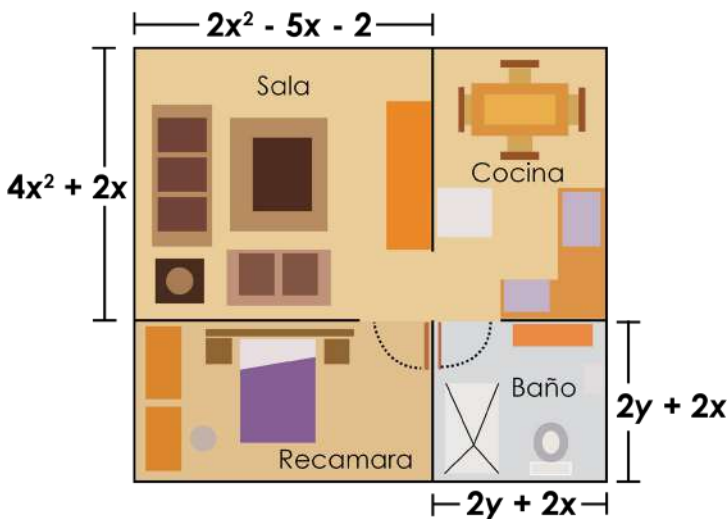
1. Cuál será el perímetro de un rectángulo cuyas medidas son $2y^2 - 7z^3 + 4y^2z$ de largo y $28y^3 - 9z^3$

$$R = 56y^3 + 4y^2 - 32z^3 + 8y^2z$$

2. El perímetro de un triángulo equilátero de lado $2x^3 + 2x - 3$ es:

$$R = 6x^3 + 6x - 9$$

3. Contesta lo que se te pide:



• ¿Cuál es el perímetro de la sala?

$$R = 12x^2 - 6x - 4$$

• ¿Cuál es el perímetro de la cocina?

$$R = 8x^2 + 8x + 4y$$

• ¿Cuál es el perímetro de la recámara?

$$R = 4x^2 - 6x + 4y - 4$$

• ¿Cuál es el perímetro del departamento?

$$R = 12x^2 + 2x + 8y - 4$$

• ¿Cuál es el perímetro del baño?

$$R = 8x + 8y$$

LEYES DE EXPONENTES

Producto de potencias de igual base:

$$(x)(x^3) = x^{1+3} = x^4$$

$$a^2b^5 (a^4b^3) = a^{2+4}b^{5+3} = a^6b^8$$

Se suman los exponentes de igual base

Potencia de potencia:

$$(x^3)^6 = x^{3(6)} = x^{18}$$

$$(a^2b^5)^4 = a^{2(4)}b^{5(4)} = a^8b^{20}$$

Se multiplican los exponentes

Cociente de potencias de igual base:

$$\frac{x^8}{x^5} = x^{8-5} = x^3$$

Se restan los exponentes de igual base

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero es igual a 1

$$3^0 = 1$$

$$456^0 = 1$$

$$x^0 = 1$$

$$(5x)^0 = 1$$

$$(a + b)^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Todo número distinto de cero elevado a un exponente negativo: es igual a una fracción cuyo numerador es la unidad, y el denominador ese mismo número elevado a ese mismo exponente, pero positivo:

$$m^{-8} = \frac{1}{m^8}$$

$$m^{-3} = \frac{1}{m^3}$$

$$(a + b)^{-6} = \frac{1}{(a + b)^6}$$

$$1) (5^6)(5^3) = 5^9$$

$$2) (-x^2y^3) \div (xy) = -xy^2$$

$$3) b^5b^7b^3 = b^{15}$$

$$4) m^6m^4m^2 = m^{12}$$

$$5) (a^4b^7c^3)^2 = a^8b^{14}c^6$$

$$6) (-6a^4b^5c^7)^0 = 1$$

$$7) (xy)(-y^3)(-x^2y) = x^3y^5$$

$$8) (5xyz)^0 = 1$$

$$9) (x^2y)(y^2)(-xy^7) = -x^5y^{10}$$

$$10) (3^2)(3^5) = 3^7$$

$$11) (a^7)(a^3) = a^{10}$$

$$12) (2m^5n^3p^7)^3 = 8m^{15}n^9p^{21}$$

$$13) (x^5)^4 = x^{20}$$

$$14) (a^4)(a^6)(a) = a^{11}$$

$$15) (ab)^7 = a^7b^7$$

16) $(2^3)(2)(2^3) = 2^7$

17) $(x^3)^5 = x^{15}$

18) $z^3z^2z z^9 = z^{15}$

19) $m^7m^2m^2m^2 = m^{13}$

20) $(1^6)(1^3)(1^4)(1) = 1^{14}$

21) $(-12m^8n^{10}o^9)^0 = 1$

22) $(w)(w)(w)(w^2) = w^5$

23) $(x^5y^4z^2)^3 = x^{15}y^{12}z^6$

24) $(-7d^2e^{5f^4}g)^2 = 49d^4f^8g^2$

25) $(h^4)(h^2)(h^4) = h^{10}$

26) $a^{-8} = \frac{1}{a^8}$

27) $m^{-5} = \frac{1}{m^5}$

28) $x^{-6}y^2z^{-3} = \frac{y^2}{x^6z^3}$

29) $(c^3b^5)^{-4} = \frac{1}{c^{12}b^{20}}$

30) $\left(\frac{ab^6}{a^9b^3}\right)^0 = 1$

31) $\frac{b^7}{b^3} = b^4$

32) $\frac{8x^9}{2x^6} = 4x^3$

33) $\frac{a^8}{a^5} = a^3$

34) $\left(\frac{m^6}{m^3}\right)^5 = \frac{m^{30}}{m^{15}} = m^{15}$

35) $\frac{3^4}{3^2} = 3^2$

36) $m^{-29} = \frac{1}{m^{29}}$

37) $m^{-5} = \frac{1}{m^5}$

38) $x^{-4}y^6z^{-8} = \frac{y^6}{x^4z^8}$

39) $(a^3b^{-4}c^{-2})^2 = \frac{a^6}{b^8c^4}$

40) $\frac{6^3}{6^5} = \frac{1}{6^2}$

41) $\frac{x^4}{x^2} = x^2$

42) $\left(\frac{b^3}{b^2}\right)^3 = \frac{b^9}{b^6} = b^3$

43) $\frac{y}{y^6} = \frac{1}{y^5}$

44) $\frac{m^6n^4}{m^6n^8} = \frac{1}{n^4}$

45) $\frac{k^9}{k^6} = k^3$

46) $\left(\frac{v^5}{v^3}\right)^6 = \frac{v^{30}}{v^{18}} = v^{12}$

47) $\frac{g^4}{g^8} = \frac{1}{g^4}$



MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Multiplicación de monomios:

Se multiplican primero los signos, después los coeficientes y se suman los exponentes de las literales iguales.

Por ejemplo:

$$(-3b)(5ab^2)(b) = -15ab^4$$

Signos

$$(-)(+)(+) = -$$

Coeficientes

$$(3)(5)(1) = 15$$

Literales iguales

$$(b)(b^2)(b) = b^{1+2+1} = b^4$$

La literal a no tiene otra con la que se multiplique por lo que se queda igual
El resultado es: **$-15ab^4$**

Multiplicación de polinomio por monomio

$$(2x^3 - 3bx^2 + b^3x)(-4bx) = -8bx^4 + 12b^2x^3 - 4b^4x^2$$

Se aplica la propiedad distributiva del término

$$-4bx$$

Se multiplica el primer término por el factor común

$$(2x^3)(-4bx) = -8bx^4$$

Se multiplica el segundo término por el factor común

$$(-3bx^2)(-4bx) = +12b^2x^3$$

Se multiplica el tercer término por el factor común

$$(b^3x)(-4bx) = -4b^4x^2$$

Multiplicación de polinomios

Así como al multiplicar un polinomio por un monomio aplicaste la propiedad distributiva también para multiplicar polinomios la aplicas, al multiplicar el multiplicando o primer polinomio por cada uno de los términos del multiplicador, acomodando en columnas los términos semejantes para después reducirlos.

$$(3a^2 - 4b^6 + 5c^4)(7a^2 - 8b^6 - 6c^4) =$$

1^{ro}. Multiplicas el primer polinomio por $(7a^2)$

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 4b^6 + 5c^4 \\ 7a^2 - 8b^6 - 6c^4 \\ \hline 21a^4 - 28a^2b^6 + 35a^2c^4 \end{array}$$

2^{do}. Multiplicas el primer polinomio por $(-8b^6)$ y ordenas en columnas los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 4b^6 + 5c^4 \\ 7a^2 - 8b^6 - 6c^4 \\ \hline 21a^4 - 28a^2b^6 + 35a^2c^4 \\ - 24a^2b^6 \end{array}$$

3^{ro}. Multiplicas el primer polinomio por $(-6c^4)$ y ordenas en columnas los términos semejantes y sumas algebraicamente las columnas.

$$\begin{array}{r}
 3a^2 - 4b^6 + 5c^4 \\
 7a^2 - 8b^6 - 6c^4 \\
 \hline
 21a^4 - 28a^2b^6 + 35a^2c^4 \\
 - 24a^2b^6 + 32b^{12} - 40b^6c^4 \\
 - 18a^2c^4 + 24b^6c^4 - 30c^8 \\
 \hline
 21a^4 - 52a^2b^6 + 17a^2c^4 + 32b^{12} - 16b^6c^4 - 30c^8
 \end{array}$$

Ejercicio:

Resuelve las siguientes multiplicaciones algebraicas:

1. $(4x^3)(2x^4) = 8x^7$
2. $(6b^4)(5b^5) = 30b^9$
3. $(2x^2)(-5xy) = -10x^3y$
4. $(-3x^2y^2z)(6xyz^3) = -18x^3y^3z^4$
5. $(-3ab^2)(-2a^2b^4c) = 6a^3b^6c$
6. $(-5mn)(-6a^2b) = 30a^2bmn$
7. $(-4x^2)(5x)(-6x^5)(-3x^3) = -360x^{11}$
8. $(-m^2n)(-3m^2)(-5mn^3) = -15m^5n^4$
9. $(-0.75x^4)(-2.1xy^2)(-2xy) = -3.15x^6y^3$
10. $(4cx - 5c + 2c^2x^2)(-2cx^3) = -8c^2x^4 + 10c^2x^3 - 4c^3x^5$
11. $(3s^2t^2)(-9s^6t^2 + 5s^7t^4 + 8st^2) = -27s^8t^4 + 15s^9t^6 + 24s^3t^4$
12. $-3a^3(8a - 4a^2 + 2a^3 - a^4) = -24a^4 + 12a^5 - 6a^6 + 3a^7$
13. $-7a^2b^5c^9(-9a - 2b^4 + 6c^3) = 63a^3b^5c^9 + 14a^2b^9c^9 - 42a^2b^5c^{12}$
14. $-9a^7b^3d^9(3ab - 3ac - 3ad) = -27a^8b^4d^9 + 27a^8b^3cd^9 + 27a^8b^3d^{10}$
15. $(3a^4b^3c^3)(8a^4b^5 - 7b^3d^6 + 7b^2c^3) = 24a^8b^8c^3 - 21a^4b^6c^3d^6 + 21a^4b^5c^6$
16. $(-2abcd)(-ab^7 + ab^4c^3 - ab^3c^4d^7) = 2a^2b^5cd - 2a^2b^5c^4d + 2a^2b^4c^5d^8$
17. $-6a^2b^4c^2(-6ab^4c^2 + 4ab^4 + 9a^2b^4c^2) = 36a^3b^8c^4 - 24a^3b^8c^2 - 54a^4b^8c^4$
18. $(-6abcd)(9a^5 - 7b^3 + 4c^4 - 6d^5) = -54a^6bcd + 42ab^4cd - 24abc^5d + 36abcd^6$
19. $(-3m^6n^7q^4r^2w^2)(2m^6n^2 - 3n^7q^4 + 3r^2w^2) = -6m^{12}n^9q^4r^2w^2 + 9m^6n^{14}q^8r^2w^2 - 9m^6n^7q^4r^4w^4$

20. $(4r^5s^3t^2w^8)(-5r^3 - 3s^8t^3 + 6t^2w^3 + 9w^5) = \underline{-20r^8s^3t^2w^8 - 12r^5s^{11}t^5w^8 + 24r^5s^3t^4w^{11} + 36r^5s^3t^2w^{13}}$
21. $(14w - 2qw + 7q^2r^3)(2qwr - 4q^2r^6w^3) = \underline{28qw^2r - 4q^2w^2r + 14q^3w^4 - 56q^2r^6w^4 + 8q^3r^6w^4 - 28q^4r^9w^3}$
22. $(a^2 + b^2 + 2ab)(a + b - 3) = a^3 + a^2b - 3a^2 + ab^2 + b^3 - 3b^2 + 2a^2b + 2ab^2 - 6ab = \underline{a^3 - 3a^2 + 3a^2b - 6ab + 3ab^2 - 3b^2 + b^3}$
23. $(-x^2 + 10x - 22)(x^2 + 3x - 5) = -x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 10x^3 + 30x^2 - 50x - 22x^2 - 66x + 110 = \underline{-x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 116x + 110}$
24. $(3df - 5f + 2d)(2d - 3f) = 6d^2f - 9df^2 - 10df + 15f^2 + 4d^2 - 6df = \underline{4d^2 + 6d^2f - 9df^2 - 16df + 15f^2}$
25. $(3d^3 - 5f^2 + 2d^3)(2d^3 - 3f^2 + 9d^3) = 6d^6 - 9d^3f^2 + 27d^6 - 10d^3f^2 + 15f^4 - 45d^3f^2 + 4d^6 - 6d^3f^2 + 18d^6 = \underline{55d^6 - 70d^3f^2 + 15f^4}$
26. $(-7d^2 + 4e - 6f^3)(d^2 + 3e + 3f^3) = -7d^4 - 21d^2e - 21d^2f^3 + 4d^2e + 12e^2 + 12ef^3 - 6d^2f^3 - 18ef^3 - 18f^6 = \underline{-7d^4 - 17d^2e - 27d^2f^3 + 12e^2 - 6ef^3 - 18f^6}$
27. $(4ab - 9ac + 8ad)(-6ab + 2ac - 7ad) = -24a^2b^2 + 8a^2bc - 28a^2bd + 54a^2bc - 18a^2c^2 + 63a^2d^2 - 48a^2bd + 16a^2cd - 56a^2d^2 = \underline{-24a^2b^2 + 62a^2bc - 76a^2bd - 18a^2c^2 + 79a^2cd - 56a^2d^2}$
28.
$$\begin{array}{r} 2a - 4b + 5c \\ -9a - 7b - 6c \\ \hline -18a^2 + 36ab - 45ac \\ -14ab \qquad \qquad + 28b^2 - 35bc \\ \qquad \qquad - 12ac \qquad \qquad + 24bc - 30c^2 \\ \hline -18a^2 + 22ab - 57ac + 28b^2 - 11bc - 30c^2 \end{array}$$
29.
$$\begin{array}{r} 2s^6t^2 - 5s^7t^4 - 5s^2t^2 \\ -3s^6t^2 + 2s^7t^4 + 4s^2t^2 \\ \hline -6s^{12}t^4 + 15s^{13}t^6 + 15s^8t^4 \\ + 45s^{13}t^6 \qquad \qquad - 10s^{14}t^8 - 10s^9t^6 \\ \qquad \qquad \qquad + 8s^8t^4 \qquad \qquad - 20s^9t^6 - 20s^4t^4 \\ \hline -6s^{12}t^4 + 19s^{13}t^6 + 23s^8t^4 - 10s^{14}t^8 - 30s^9t^6 - 20s^4t^4 \end{array}$$



30.
$$\begin{array}{r} -2a^4b^5 - 4b^2d^6 + 2b^2 \\ 8a^4b^5 - 2b^2d^6 + 4b^2 \\ \hline -16a^8b^{10} - 32a^4b^7d^6 + 16a^4b^7 \\ + 4a^4b^7d^6 + 8b^6d^{12} - 4b^4d^6 \\ - 8a^4b^7 - 16b^4d^6 + 8b^4 \\ \hline -16a^8b^{10} - 28a^4b^7d^6 + 8a^4b^7 + 8b^6d^{12} - 20b^4d^6 + 8b^4 \end{array}$$
31.
$$\begin{array}{r} -3x - 9y - 5z \\ 2x + 6y + 4z \\ \hline -6x^2 - 18xy - 10xz \\ - 18xy - 54y^2 - 30yz \\ - 12xz - 36yz - 20z^2 \\ \hline -6x^2 - 36xy - 22xz - 54y^2 - 66yz - 20z^2 \end{array}$$
32.
$$\begin{array}{r} -6a^2b^5c^3 - 3b^3c^7d^3 + 4a^2b^3c^4 \\ -5a^2b^5c^3 - 9b^3c^7d^3 + 3a^2b^3c^4 \\ \hline 30a^4b^{10}c^6 + 15a^2b^8c^{10}d^3 - 20a^4b^8c^7 \\ + 54a^2b^8c^{10}d^3 + 27b^6c^{14}d^6 - 36a^2b^6c^{11}d^3 \\ - 18a^4b^8c^7 - 9a^2b^6c^{11}d^3 + 12a^4b^6c^8 \\ \hline 30a^4b^{10}c^6 + 69a^2b^8c^{10}d^3 - 38a^4b^8c^7 + 27b^6c^{14}d^6 - 45a^2b^6c^{11}d^3 + 12a^4b^6c^8 \end{array}$$

Contesta lo que se te pide:

1. Encuentra el área de un cuadrilátero con los siguientes datos:

base = $x^2 - 2xy$

altura = $-3xy$

a) $A = -3x^3y + 6x^2y^2$

$(x^2 + 2xy)(-3xy) = -3x^3y + 6x^2y^2$

b) $A = 3x^3 + 6x^2y^2$

c) $A = -3x^3y + 6xy^2$

2. Encuentra el área de un cuadrilátero con los siguientes datos:

base = $a^2 - 2ab + b^2$

altura = $5ab$

a) $A = 5a^2b - 10a^2b^2 + 5ab^2$

$(a^2 - 2ab + b^2)(5ab) = 5a^3b - 10a^2b^2 + 5ab^3$

b) $A = 5a^3b - 10a^2b^2 + 5ab^3$

c) $A = 5a^2b - 10a^2b^2 + 5ab$

3. Encuentra el área de un cuadrilátero con los siguientes datos:

base = $x^2 - 3x + 6$

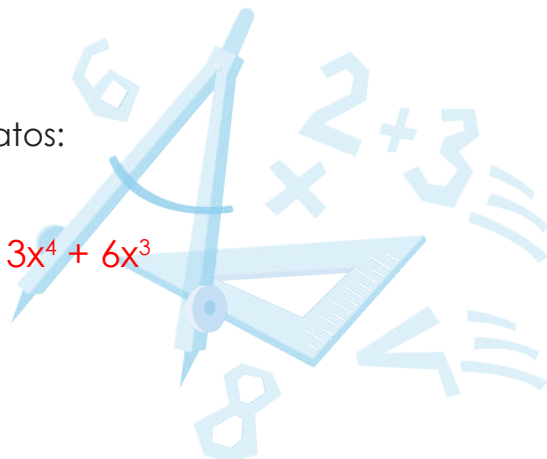
altura = x^3

a) $A = x^5 - 3x^4 + 6x^4$

$(x^2 - 3x + 6)(x^3) = x^5 - 3x^4 + 6x^3$

b) $A = x^6 - 3x^4 + 6x^3$

c) $A = x^5 - 3x^4 + 6x^3$



4. Encuentra el volumen de un cubo de $x^2 + 3$ metros de arista:

a) $V = x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$

b) $V = x^6 + 9x^3 + 27x^2 + 27$

c) $V = x^6 + 9x^4 + 27x^2$

$$\begin{aligned}(x^2 + 3)^3 &= (x^2)^3 + 3(x^2)^2(3) + 3(x^2)(3)^2 + (3)^3 \\ &= x^6 + 3(x^4)(3) + 3(x^2)(9) + 27 \\ &= x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27\end{aligned}$$

5. Encuentra la distancia que recorre un automóvil si su velocidad es $3x^2 + 2xy$ y utiliza un tiempo de $2x + 3y$ (la fórmula para obtener la distancia es: $d = vt$).

a) $d = 3x^3 + 13x^2y + 6xy^2$

b) $d = 6x^3 + 13xy + 6xy^2$

c) $d = 6x^3 + 13x^2y + 6xy^2$

$$\begin{aligned}(3x^2 + 2xy)(2x + 3y) &= 6x^3 + 9x^2y + 4x^2y + 6xy^2 \\ &= 6x^3 + 13x^2y + 6xy^2\end{aligned}$$

Relaciona las dos columnas colocando dentro del paréntesis la letra que corresponda al producto de las multiplicaciones.

(c) $(x^2 + 3xy + 6)(2x^2 + xy + 2)$

(e) $(2x + 5)(3x - 4)$

(a) $(6x - 3)(x^2 - 4x + 5)$

(d) $(-a^3 + a^2 - 2a + 2)(a + 1)$

(b) $(2x^2 - 5xy + 6y^2)(3x^2 + 2xy - 4y^2)$

a) $6x^3 - 27x^2 + 42x - 15$

b) $6x^4 - 11x^3y + 32xy^3 - 24y^4$

c) $2x^4 + 7x^3y + 14x^2 + 3x^2y^2 + 12xy + 12$

d) $-a^4 - a^2 + 2$

e) $6x^2 + 7x - 20$



PRODUCTOS NOTABLES

Producto de binomios conjugados.

Son binomios que se forman por los mismos términos y, difieren en su signo, por ejemplo:

$(x + 7)(x - 7)$, su producto equivale a: “Cuadrado del primer término menos cuadrado del segundo término”, es decir, una diferencia de cuadrados.

Por ejemplo:

$$(x + 2)(x - 2) = (x)^2 - (2)^2 = x^2 - 4$$

$$(5y + 7)(5y - 7) = 25y^2 - 49$$

Producto de binomios con término común.

En los binomios encontramos un término que se repite, por ejemplo:

$(x + 2)(x - 7)$, su producto equivale a: “Cuadrado del término común, la suma algebraica de los términos no comunes multiplicada por el término común, el producto de los términos no comunes”, es decir, un trinomio cuadrado.

Por ejemplo:

$$(x + 5)(x + 4) = (x)^2 + x(5 + 4) + (5)(4) = x^2 + 9x + 20$$

$$(5y + 1)(5y - 7) = (5y)^2 + (5y)(1 - 7) + (1)(-7) = 25y^2 - 30y - 7$$

Binomio al cuadrado

$(x + 2)^2$, su producto equivale a: “La suma algebraica del cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término”, es decir, un trinomio cuadrado perfecto.

Por ejemplo:

$$(x + 5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$



Resuelve los siguientes binomios conjugados:

$$1) (3x - 5)(3x + 5) = 9x^2 + 15x - 15x - 25 = \underline{9x^2 - 25}$$

$$2) (7m - 3y)(7m + 3y) = 49m^2 + 21my - 21my - 9y^2 = \underline{49m^2 - 9y^2}$$

$$3) (8x^2 - 4)(8x^2 + 4) = 64x^4 + 32x^2 - 32x^2 - 16 = \underline{64x^4 - 16}$$

$$4) (9 - 7y)(9 + 7y) = 81 + 63y - 63y - 49y^2 = \underline{81 - 49y^2}$$

$$5) (2m^3 - 10)(2m^3 + 10) = 4m^6 + 20m^3 - 20m^3 - 100 = \underline{4m^6 - 100}$$

$$6) \left(\frac{3}{5}x - 1\right)\left(\frac{3}{5}x + 1\right) = \frac{9}{25}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}x - 1 = \underline{\frac{9}{25}x^2 - 1}$$

Resuelve los siguientes binomios con un término común:

$$1) (x - 8)(x + 5) = x^2 + 5x - 8x - 40 = \underline{x^2 - 3x - 40}$$

$$2) (2x - 6)(2x + 3) = 4x^2 + 6x - 12x - 18 = \underline{4x^2 - 6x - 18}$$

$$3) (8x - 4)(8x + 6) = 64x^2 + 48x - 32x - 24 = \underline{64x^2 + 16x - 24}$$

$$4) (x - 7)(x + 1) = x^2 + x - 7x - 7 = \underline{x^2 - 6x - 7}$$

$$5) (3x + 8)(3x + 1) = 9x^2 + 3x + 24x + 8 = \underline{9x^2 + 27x + 8}$$

$$6) (m - 10)(m + 5) = m^2 + 5m - 10m - 50 = \underline{m^2 - 5m - 50}$$

Resuelve los siguientes binomios al cuadrado:

$$1) (x - 8)^2 = (x)^2 + 2(x)(-8) + (-8)^2 = \underline{x^2 - 16x + 64}$$

$$2) (2x - 6)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-6) + (-6)^2 = \underline{4x^2 - 24x + 36}$$

$$3) (8x^3 - 4)^2 = (8x^3)^2 + 2(8x^3)(-4) + (-4)^2 = \underline{64x^6 - 64x^3 + 16}$$

$$4) (7 + x)^2 = (7)^2 + 2(7)(x) + (x)^2 = \underline{49 + 14x + x^2}$$

$$5) (a + b)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$$



$$6) (5m - 10x)^2 = (5m)^2 + 2(5m)(-10x) + (-10x)^2 = \underline{25m^2 + 100x + 100x^2}$$

Resuelve los siguientes productos notables:

$$1) (x + 5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 = \underline{x^2 + 10x + 25}$$

$$2) (7a + b)^2 = (7a)^2 + 2(7a)(b) + (b)^2 = \underline{49a^2 + 14ab + b^2}$$

$$3) (4ab^2 + 6xy^3)^2 = (4ab^2)^2 + 2(4ab^2)(6xy^3) + (6xy^3)^2 = \underline{16a^2b^4 + 48ab^2xy^3 + 36x^2y^6}$$

$$4) (x^4 + y^2)^2 = (x^4)^2 + 2(x^4)(y^2) + (y^2)^2 = \underline{x^8 + 2x^4y^2 + y^4}$$

$$5) (8 - a)^2 = (8)^2 + 2(8)(-a) + (-a)^2 = \underline{64 - 16a + a^2}$$

$$6) (3x^4 - 5y^2)^2 = (3x^4)^2 + 2(3x^4)(-5y^2) + (-5y^2)^2 = \underline{9x^8 - 30x^4y^2 + 25y^4}$$

$$7) (x^5 - 4x^3)^2 = (x^5)^2 + 2(x^5)(-4x^3) + (-4x^3)^2 = \underline{x^{10} - 8x^8 + 16x^6}$$

$$8) (5x + 2y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(2y) + (2y)^2 = \underline{25x^2 + 20xy + 4y^2}$$

$$9) (2x^4 - 8y^4)^2 = (2x^4)^2 + 2(2x^4)(-8y^4) + (-8y^4)^2 = \underline{4x^8 - 32x^4y^4 + 64y^8}$$

$$10) (x + 5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 = \underline{x^2 + 10x + 25}$$

$$11) (a - 3)^2 = (a)^2 + 2(a)(-3) + (-3)^2 = \underline{a^2 - 6a + 9}$$

$$12) (2x + 7)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(7) + (7)^2 = \underline{4x^2 + 28x + 49}$$

$$13) (ax^2 - by)^2 = (ax^2)^2 + 2(ax^2)(-by) + (-by)^2 = \underline{a^2x^4 - 2ax^2by + b^2y^2}$$

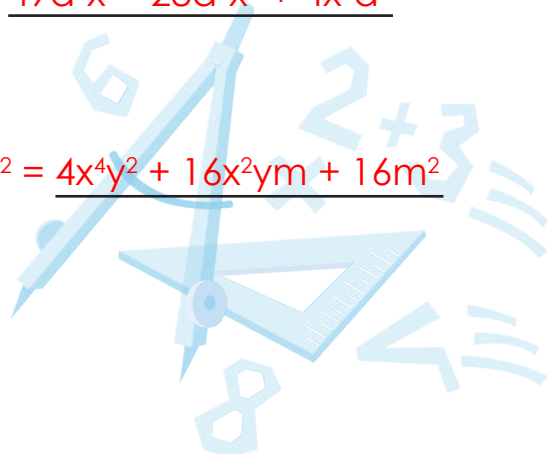
$$14) (r - 3s)^2 = (r)^2 + 2(r)(-3s) + (-3s)^2 = \underline{r^2 - 6rs + 9s^2}$$

$$15) (7a^2x^3 - 2xa^2)^2 = (7a^2x^3)^2 + 2(7a^2x^3)(-2xa^2) + (-2xa^2)^2 = \underline{49a^4x^6 - 28a^4x^3 + 4x^2a^4}$$

$$16) (x + 4)(x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = \underline{x^2 + 8x + 16}$$

$$17) (2x^2y + 4m)(2x^2y + 4m) = 4x^4y^2 + 8x^2ym + 8x^2ym + 16m^2 = \underline{4x^4y^2 + 16x^2ym + 16m^2}$$

$$18) (1 - 4y)(1 - 4y) = 1 - 4y - 4y + 16y^2 = \underline{1 - 8y + 16y^2}$$



$$19) (3a^3 - 7xy^4)(3a^3 - 7xy^4) = 9a^6 - 21a^3xy^4 - 21a^3xy^4 + 49x^2y^8 = \underline{9a^6 - 42a^3xy^4 + 49x^2y^8}$$

$$20) (y - 12)(y - 7) = y^2 - 7y - 12y + 84 = \underline{y^2 - 19y + 84}$$

$$21) (x + 5)(x + 3) = x^2 + 3x + 5x + 15 = \underline{x^2 + 8x + 15}$$

$$22) (4x^3 + 15)(4x^3 + 5) = 16x^6 + 20x^3 + 60x^3 + 75 = \underline{16x^6 + 80x^3 + 75}$$

$$23) (5a + 10b)(5a - 10b) = 25a^2 - 50ab + 50ab - 100b^2 = \underline{25a^2 - 100b^2}$$

$$24) (7x^2 - 12y^3)(7x^2 + 12y^3) = 49x^4 + 84x^2y^3 - 84x^2y^3 - 144y^6 = \underline{49x^4 - 144y^6}$$

$$25) (a + 9)(a - 6) = a^2 - 6a + 9a - 54 = \underline{a^2 + 3a - 54}$$

$$26) (5y^2 + 4)(5y^2 - 14) = 25y^4 - 70y^2 + 20y^2 - 56 = \underline{25y^4 - 50y^2 - 56}$$

$$27) (9x - 4)(9x + 4) = 81x^2 + 36x - 36x - 16 = \underline{81x^2 - 16}$$

$$28) (2r - 3s)(2r + 4m^2) = 4r^2 + 8rm^2 - 6sr - 12sm^2$$

$$29) \left(\frac{2}{3}x + 9y\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}x\right)(9y) + (9y)^2 = \underline{\frac{4}{9}x^2 + 12xy + 8y^2}$$

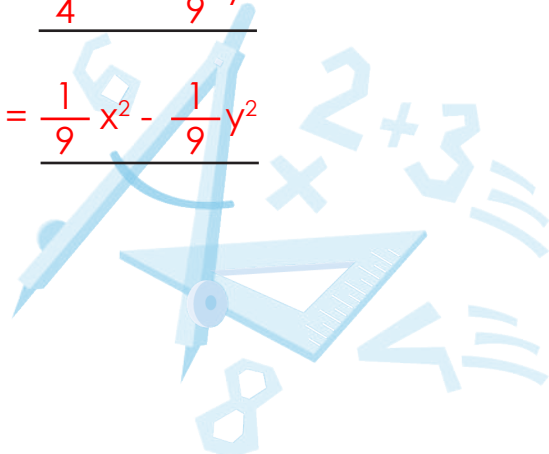
$$30) \left(\frac{4}{6}y + 5abc^2\right)^2 = \left(\frac{4}{6}y\right)^2 + 2\left(\frac{4}{6}y\right)(5abc^2) + (5abc^2)^2 = \underline{\frac{4}{9}y^2 + \frac{20}{3}abc^2 + 25a^2b^2c^4}$$

$$31) \left(5y + \frac{2}{7}x\right)\left(5y - \frac{2}{7}x\right) = 25y^2 - \frac{10}{7}yx + \frac{10}{7}yx - \frac{4}{49}x^2 = \underline{25y^2 - \frac{4}{49}x^2}$$

$$32) \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{10}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{9}{10}\right) = \frac{4}{25}x^2 - \frac{18}{50}x + \frac{4}{50}x - \frac{18}{100} = \underline{\frac{4}{25}x^2 - \frac{7}{25}x - \frac{9}{50}}$$

$$33) \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{6}xy + \frac{2}{6}xy - \frac{4}{9}y^2 = \underline{\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}y^2}$$

$$34) \left(\frac{3}{9}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{3}{9}x - \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{81}x^2 - \frac{3}{27}xy + \frac{3}{27}xy - \frac{1}{9}y^2 = \underline{\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}y^2}$$



Resuelve cada uno de los siguientes productos notables e identifica cada caso.

1. $(2x - 3)^2$:

- A) $4x - 12x + 9$
 B) $4x^2 + 12x + 9$
 C) $4x^2 - 12x - 9$
 D) $4x^2 - 12x + 9$

2. $(5x - 4)^2$:

- A) $25x^2 + 40x + 16$
 B) $25x - 40x + 16$
 C) $25x^2 - 40x - 16$
 D) $25x^2 - 40x + 16$

3. $(7x + 5)^2$:

- A) $49x^2 + 70x + 25$
 B) $49x^2 - 70x + 25$
 C) $49x^2 + 70x - 25$
 D) $49x^4 + 70x + 25$

4. $(6x + 3)^2$:

- A) $36x^4 + 36x + 9$
 B) $36x^2 + 36x + 9$
 C) $36x + 36x + 9$
 D) $36x^2 + 36x - 9$

5. $(8x - 9)^2$:

- A) $64x^2 - 144x + 81$
 B) $64x^2 + 144x + 81$
 C) $64x^2 - 144x - 81$
 D) $64x^2 - 144 + 81$

6. $(2x - 7)^2$:

- A) $4x^2 - 28x - 49$
 B) $4x^2 - 28x + 49$
 C) $4x^2 + 28x + 49$
 D) $4x^2 - 28x + 48$

7. $(10x + 6)^2$:

- A) $20x^2 + 120x + 36$
 B) $100x^2 - 120x + 36$
 C) $100x^2 + 120x + 35$
 D) $100x^2 + 120x + 36$

8. $(11x + 3)^2$:

- A) $121x^2 + 66x - 9$
 B) $112x^2 + 66x + 9$
 C) $121x^2 + 60x + 9$
 D) $121x^2 + 66x + 9$

9. $(20x - 2)^2$:

- A) $400x^2 + 80x + 4$
 B) $80x^2 - 80x + 4$
 C) $400x^2 + 80x + 4$
 D) $400x^2 - 80x + 4$

10. $(30x - 1)^2$:

- A) $90x^2 - 60x + 1$
 B) $900x^2 - 60x - 1$
 C) $900x^2 - 60x + 1$
 D) $900x^2 + 60x + 1$

11. $(3x + 4b)(3x - 4b)$:

- A) $9x^2 + 16b^2$
 B) $9x^2 - 16b^2$
 C) $6x^2 - 8b^2$
 D) $9x - 16b$

12. $(8x^2 + 7)(8x^2 - 7)$:

- A) $16x^2 - 14$
 B) $64x^4 - 49$
 C) $64x^2 + 49$
 D) $64x^2 - 49$

13. $(2x + 2)(2x + 3)$:

- A) $4x^2 - 10x + 6$
 B) $4x^2 + 10x + 6$
 C) $4x^2 + 10x + 5$
 D) $4x^2 + 5x + 6$

14. $(3x + 9)(3x + 2)$:

- A) $9x^2 - 33x + 18$
 B) $9x^2 + 11x + 18$
 C) $9x^2 + 33x + 18$
 D) $9x^2 + 33x + 11$

15. $(4x^2 - 9)(4x^2 - 6)$:

- A) $16x^4 - 60x^2 + 15$
 B) $16x^4 - 60x^2 - 54$
 C) $16x^4 + 60x^2 + 54$
 D) $16x^4 - 60x^2 + 54$

16. $(8x^2 - 3)(8x^2 - 7)$:

- A) $64x^4 - 80x^2 + 21$
 B) $64x^4 - 80x^2 - 21$
 C) $64x^4 - 80x^2 + 10$
 D) $64x^4 + 80x^2 + 21$

17. $(7x^4 - 15)(7x^4 + 8)$:

- A) $49x^8 + 49x^4 - 120$
 B) $14x^8 - 49x^4 - 120$
 C) $49x^8 - 49x^4 - 120$
 D) $49x^8 - 49x^4 + 120$

18. $(5x^3 + 12)(5x^3 - 10)$:

- A) $25x^6 + 10x^3 - 120$
 B) $25x^6 + 10x^3 + 120$
 C) $25x^6 - 10x^3 - 120$
 D) $25x^6 + 10x^3 - 2$

19. $(14x^3 + 3)(14x^3 - 8)$:

- A) $196x^6 - 70x^3 - 24$
 B) $190x^6 - 70x^3 - 24$
 C) $196x^6 + 70x^3 - 24$
 D) $196x^6 - 70x^3 + 24$

20. $(0.8x^8 + 0.7b^{10})(0.8x^8 - 0.7b^{10})$:

- A) $6.4x^{16} - 4.9b^{20}$
 B) $0.64x^{16} + 0.49b^{20}$
 C) $0.64x^8 - 0.49b^{10}$
 D) $0.64x^{16} - 0.49b^{20}$

21. $(7m^3x^9 + 0.2h^7b^{10})(7m^3x^9 - 0.2h^7b^{10})$:

- A) $49m^3x^4h^{19} - 14b^{20}$
 B) $49m^6x^{18} + 0.04h^{14}b^{20}$
 C) $49m^3x^{19} - 0.04h^{17}b^{10}$
 D) $49m^6x^{18} - 0.04h^{14}b^{20}$

22. $(25x^9 + 9)(25x^9 - 8):$

- A) $625x^{18} + 25x^9 + 1$
 B) $625x^{18} - 25x^9 - 72$
 C) $625x^{18} + 25x^9 + 72$
 D) $625x^{18} + 25x^9 - 72$

23. $(9x^9 - 10b^6)(9x^9 + 10b^6):$

- A) $18x^{18} - 20b^{12}$
 B) $81x^{18} - 100b^{12}$
 C) $81x^9 - 100b^{12}$
 D) $81x^{18} + 100b^6$

24. $(3x^5 + b^{13})(3x^5 - b^{13}):$

- A) $9x^{10} - b^{26}$
 B) $9x^{10} + b^{26}$
 C) $9x^5 - b^{13}$
 D) $6x^{10} - b^{26}$

25. $(10x^6 - 20)(10x^6 + 25):$

- A) $100x^{12} + 50x^6 + 500$
 B) $100x^{12} - 50x^6 - 500$
 C) $20x^{12} + 50x^6 - 500$
 D) $100x^{12} + 50x^6 - 500$

26. $(12x^8 - 8)(12x^8 + 6):$

- A) $144x^{16} - 24x^8 + 48$
 B) $24x^{16} - 24x^8 - 48$
 C) $144x^{16} + 24x^8 - 48$
 D) $144x^{16} - 24x^8 - 48$

26. $(20x^{25} - 12b^{30})(20x^{25} + 12b^{30}):$

- A) $400x^{25} - 144b^{30}$
 B) $200x^{50} - 72b^{60}$
 C) $400x^{50} + 144b^{60}$
 D) $400x^{50} - 144b^{60}$

28. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}b^2\right)\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}b^2\right):$

- A) $\frac{9}{16}x^4 + \frac{1}{64}b^4$
 B) $\frac{16}{19}x^2 - \frac{64}{1}b^2$
 C) $\frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{64}b^2$
 D) $\frac{9}{16}x^4 - \frac{1}{64}b^4$

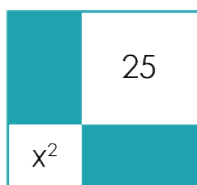
29. $\left(\frac{4}{8}x^6 + \frac{3}{9}b^9\right)\left(\frac{4}{8}x^6 - \frac{3}{9}b^9\right):$

- A) $\frac{16}{64}x^6 - \frac{9}{81}b^9$
 B) $\frac{16}{64}x^{12} + \frac{9}{81}b^{18}$
 C) $\frac{16}{64}x^{12} - \frac{9}{81}b^{18}$
 D) $\frac{64}{16}x^{12} - \frac{81}{9}b^{18}$

30. $(0.5x^2 + 0.2b^2)(0.5x^2 - 0.2b^2):$

- A) $0.025x^4 - 4b^4$
 B) $2.5x^4 - 0.4b^4$
 C) $0.25x^4 + 0.04b^4$
 D) $0.25x^4 - 0.04b^4$

31. Observa la figura que se presenta continuación: ¿Qué expresión algebraica representa su área?



- A) $A = (x + 5)^2$
 B) $A = x + 25$
 C) $A = (x^2 + 25)^2$
 D) $A = 4(x^2 + 25)$



DIVISIÓN ALGEBRAICA

La división de polinomio entre un monomio la puedes encontrar en esta forma:

$$5h^6 \overline{) 10h^6m - 35h^9 + 95a^2h^{10}}$$

Para poderla resolver divides cada término del dividendo entre el término del divisor:

$$\begin{array}{r} 2m - 7h^3 + 19a^2h^4 \\ 5h^6 \overline{) 10h^6m - 35h^9 + 95a^2h^{10}} \\ \underline{- 10h^6m} \phantom{+ 95a^2h^{10}} \\ 0 \phantom{+ 95a^2h^{10}} - 35h^9 \\ \underline{+ 35h^9} \phantom{+ 95a^2h^{10}} \\ 0 \phantom{+ 95a^2h^{10}} + 95a^2h^{10} \\ \phantom{+ 95a^2h^{10}} \underline{- 95a^2h^{10}} \\ \phantom{+ 95a^2h^{10}} 0 \end{array}$$

Ejercicio:

Resuelve las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r} 1. \quad 2m - 7h^3 + 19a^2h^4 \\ 5h^6 \overline{) 10h^6m - 35h^9 + 95a^2h^{10}} \\ \underline{- 10h^6m} \phantom{+ 95a^2h^{10}} \\ 0 \phantom{+ 95a^2h^{10}} - 35h^9 \\ \underline{+ 35h^9} \phantom{+ 95a^2h^{10}} \\ 0 \phantom{+ 95a^2h^{10}} + 95a^2h^{10} \\ \phantom{+ 95a^2h^{10}} \underline{- 95a^2h^{10}} \\ \phantom{+ 95a^2h^{10}} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad -4x + 8x^5 - 12 \\ -2x^4 \overline{) 8x^5 - 16x^9 + 24x^4} \\ \underline{- 8x^5} \\ 0 - 16x^9 \\ \underline{+ 16x^9} \\ 0 + 24x^4 \\ \underline{- 24x^4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 7m^4 + 9m - 6 \\ 13m^5 \overline{) 91m^9 + 117m^6 - 78m^5} \\ \underline{- 91m^9} \\ 0 + 117m^6 \\ \underline{- 117m^6} \\ 0 - 78m^5 \\ \underline{+ 78m^5} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad -8xz^9 + 4y^3 - 2 \\ 10x^2y^7 \overline{) -80x^3y^7z^9 + 40x^2y^{10} - 20x^2y^7} \\ \underline{+ 80x^3y^7z^9} \phantom{+ 40x^2y^{10} - 20x^2y^7} \\ 0 \phantom{+ 40x^2y^{10} - 20x^2y^7} + 40x^2y^{10} \\ \underline{- 40x^2y^{10}} \\ 0 - 20x^2y^7 \\ \underline{+ 20x^2y^7} \\ 0 \end{array}$$

$$5. (72x^3 - 18x^2 + 36x) \div (18x) = 4x^2 - x + 2 \quad 6. (-50r^4s + 10r^2s^2 + 5rs) \div (-5rs) = 10r^3 - 2rs - 1$$

$$7. (12y^3 + 15yz - 18y^5) \div (-3y^2) = -4y - \frac{5z}{y} + 6y^3$$

$$8. \frac{28a^4}{14a^3} = 2a$$

$$9. \frac{12a^2b^5c^4}{-6a^2b^3c^2} = -2b^2c^2$$

$$10. \frac{-12m^6n^4p^5}{-4m^3n^2p^5} = 3m^3n^2$$

$$11. \frac{36c^4d^5e^8f^6}{-9c^3d^5e^3f^6} = -4ce^5$$

$$12. \frac{-14x^2y^3z^9}{7x^2y^3z^3} = -2z^6$$

$$13. \frac{-72m^7n^3p^8}{-8m^4n^3p^4} = 9m^3p^4$$

$$14. \frac{-100x^2y^5z^9}{-25x^2y^4z^9} = 4y$$

$$15. \frac{-63m^4n^7o^5p^3}{126m^2n^5o^3p} = -\frac{4}{7}m^2n^2o^2p^2$$

$$16. \frac{-45a^3b^2c}{7a^5b^2c^3} = \frac{-45}{7a^2c^2}$$

$$17. \frac{45d^5e^4f^8g^9}{-9d^9f^3} = \frac{-5e^4f^5g^9}{d^4}$$

$$18. \frac{12a^2b^3c^6}{12a^6b^9c^2} = \frac{c^4}{a^4b^6}$$

$$19. \frac{4q^4r^3s^2t^5}{-64q^6r^7s^9t^8} = \frac{1}{16q^2r^4s^7t^3}$$

$$20. \frac{54a^4b^6 + 34a^{14}b^9}{24a^{10}b^7} = \frac{9}{4a^6b} + \frac{17}{12}a^4b^2$$

$$21. \frac{-12x^9y^7z^9 + 9x^6z^8 - 36x^5y^5z^9}{3x^2z^8} = -4x^7y^7z + 3x^4 - 12x^3y^5z$$

$$22. \frac{63a^7b^7c^5 - 7a^4b^4c^3 - 35a^3b^2c^6}{7a^3b^2c^3} = 9a^4b^5c^2 - ab^2 - 5c^3$$

$$23. \frac{-25m^4n^5p^7 - 105m^3n^4p^4 - 75m^2n^4p^8}{-25m^2n^4p} = m^2np^6 + \frac{21}{5}mp^3 + 3p^7$$

$$24. \frac{64w^5x^5y^5 - 24w^8y^4 + 32w^6x^4y^2}{8w^4y^2} = 8wx^5y^3 - 3w^4y^2 + 4w^2x^4$$

$$25. \frac{-30a^9b^7c^4 - 90a^4c^2 + 90a^2b^3c^3}{-10a^2b^4c^8} = \frac{3a^7b^3}{c^3} + \frac{9a^2}{b^4c^6} - \frac{9}{bc^5}$$

$$26. \frac{d^8e^2f + 5d^6f^8 - 3d^4e^3f^2}{15d^2e^8f^2} = \frac{1d^6}{15e^6f} + \frac{1d^4f^6}{3e^8} - \frac{1d^2}{5e^5}$$

$$27. \frac{-36a^9b^7c^9 - 9a^6b^8 - 13a^5b^5c^9}{26a^2b^8c^2} = -\frac{18a^7c^7}{13b} - \frac{9a^4}{26c^2} - \frac{1a^3c^7}{2b^3}$$

$$28. \frac{x^6y^3z^5 + 9x^3y^2z^6 - 45x^2y^3z^4}{-3x^2y^8} = -\frac{1x^4z^5}{3y^5} - \frac{3xz^6}{y^6} + \frac{15z^4}{y^5}$$



$$29. \frac{32m^5n^4u^3 - 16m^2n^4u^2 - 8m^5n^3u^7}{64m^2n^4u^2} = \frac{1}{2}m^3u - \frac{1}{4} - \frac{1m^3u^5}{8n}$$

$$30. \frac{-36a^7b^5c^4 - 7a^6b^8 + 5a^6b^3c^3}{6a^5b^8c} = -\frac{6a^2c^3}{b^3} - \frac{7a}{6c} + \frac{5ac^2}{6b^5}$$

$$31. \frac{24xy^5z^5 + 64x^3y^7z^6 - 40x^2yz^2}{-8x^2y^3} = -\frac{3y^2z^5}{x} - 8xy^4z^3 + \frac{5z^2}{y^2}$$

$$32. \frac{36m^2n^4u^9 - 18m^2n^2u^2 - 81m^3n^2u^2}{18m^2n^4u^6} = 2u^3 - \frac{1}{n^2u^4} - \frac{27m}{6n^4u^4}$$

$$33. (4x^3 - 8x^2 + 6x) \div (2x^2 - 5x) = 2x + 1$$

$$34. (x^2 - 9xy + 20y^2) \div (x - 5y) = x - 4y$$

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x \overline{) 4x^3 - 8x^2 + 6x} \\ \underline{-4x^3 + 10x^2} \\ 0 + 2x^2 + 6x \\ \underline{-2x^2 + 5x} \\ 0 + 11x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 4y \\ x - 5y \overline{) x^2 - 9xy + 20y^2} \\ \underline{-x^2 + 5xy} \\ 0 - 4xy + 20y^2 \\ \underline{+4xy - 20y^2} \\ 0 \end{array}$$

$$35. (x^2 - 5x - 6) \div (x - 3) = x - 2$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x - 3 \overline{) x^2 - 5x - 6} \\ \underline{-x^2 + 3x} \\ 0 - 2x - 6 \\ \underline{+2x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Relaciona las dos columnas colocando dentro del paréntesis el cociente de las divisiones:

(d) $\frac{axy + bxy}{xy}$

(a) $(a + b + c + d) \div (4)$

(b) $\frac{18a^3b^2 - 6a^2b^3 + 3a^4b^4}{-3a^2b^2}$

(e) $\frac{5a^2 + 25a^4 - 15a^3}{-5a}$

(c) $(81a^2 - 18a^5 + 180a^{12}) \div (-9a^{15})$

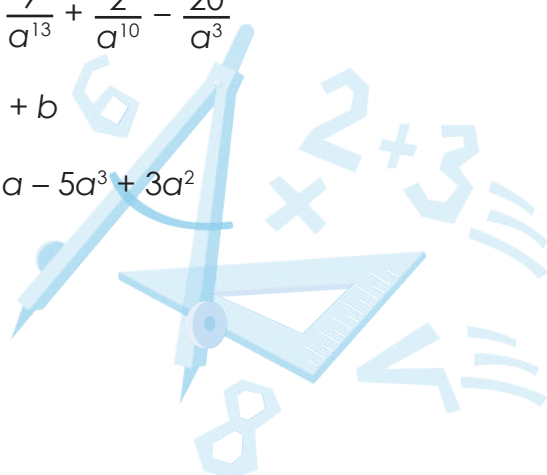
a) $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} + \frac{d}{4}$

b) $-6a + 2b - a^2b^2$

c) $-\frac{9}{a^{13}} + \frac{2}{a^{10}} - \frac{20}{a^3}$

d) $a + b$

e) $-a - 5a^3 + 3a^2$



FACTORIZACIÓN

Factor común monomio

Debe encontrarse el máximo común divisor de los coeficientes y de las literales, es decir, encontrar el mayor divisor común numérico y elegir la literal común con menor exponente, por ejemplo:

$$12x^3 + 45x^2 = 3x^2 (4x + 15)$$

12 y 45, máximo divisor es 3, x^2 literal común con menor exponente.

$$9x^2y^5 - 36x^4y^3 = 9x^2y^3 (y^2 - 4x^2)$$

9 y 36, máximo divisor común es 9, x^2y^3 , literales comunes con menor exponente.

Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados equivale a un “*producto de binomios conjugados*”. Los binomios se forman por los mismos términos y solamente difieren en un signo. Para factorizar se debe encontrar la raíz cuadrada de ambos términos, por ejemplo.

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

$$25y^2 - 49 = (5y + 7)(5y - 7)$$

Trinomio cuadrado

Un trinomio cuadrado equivale a un “*producto de binomios con término común*”. Para factorizar hay que encontrar la raíz cuadrada del término cuadrático y buscar una pareja de números que cumplan con una doble condición, que sumados algebraicamente den el coeficiente del segundo término y multiplicados algebraicamente den el coeficiente del tercer término del trinomio, por ejemplo:

$$(-8) + (-3) \text{ suman } -11$$

$$x^2 - 11x + 24 = (x - 8)(x - 3)$$

$$(-8)(-3) \text{ multiplican } 24$$

$$2x(6 + 2) = 16x$$

$$4x^2 + 16x + 12 = (2x + 6)(2x + 2)$$

$$(6)(2) = 12$$



Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto equivale a un "binomio al cuadrado". Para factorizar hay que encontrar la raíz cuadrada de los términos cuadráticos y verificar que el término central del trinomio sea el doble producto de la primera raíz cuadrada por la segunda raíz, por ejemplo:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2(x)(5) \end{array}$$

$$4x^2 + 24x + 36 = (2x + 6)^2$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2(2x)(6) \end{array}$$

Ejercicio:

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

$$1) 25x^6 + 10x^2 + 35x = 5x(5x^5 + 2x + 7)$$

$$2) 16m^2 - 40m^4 + 20m^6 = 4m^2(4 - 10m^2 + 5m^4)$$

$$3) 4x^2 - 18x = 2x(2x - 9)$$

$$4) 55x^3 - 20x^4y + 5y^2 = 5(11x^3 - 4x^4y + y^2)$$

$$5) 9x^2 - 6x + 12x^4 = 3x(3x - 2 + 4x^3)$$

$$6) x^2 - x^5 = x^2(1 - x^3)$$

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

$$1) 9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$$

$$2) 49m^2 - 16 = (7m + 4)(7m - 4)$$

$$3) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$4) 16 - 25y^8 = (4 + 5y^4)(4 - 5y^4)$$

$$5) 9x^6 - 25 = (3x^3 + 5)(3x^3 - 5)$$

$$6) 64m^6 - 100 = (8m^3 + 10)(8m^3 - 10)$$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados:

$$1) x^2 - 4x - 60 = (x - 10)(x + 6)$$

$$2) 49m^2 - 21m + 2 = (7m - 2)(7m - 1)$$

$$3) x^2 - 13x + 40 = (x - 8)(x - 5)$$

$$4) 25x^2 - 10x - 8 = (5x - 4)(5x + 2)$$

$$5) 81x^2 + 36x + 3 = (9x + 3)(9x + 1)$$

$$6) x^2 - 6x - 27 = (x - 9)(x + 3)$$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

$$1) x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

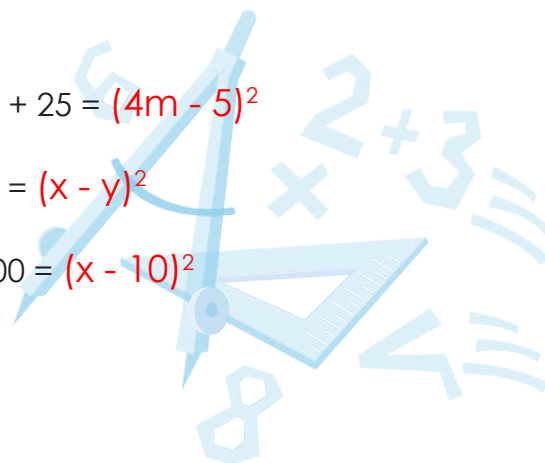
$$2) 16m^2 - 40m + 25 = (4m - 5)^2$$

$$3) x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$$

$$4) x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$5) 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$$

$$6) x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$$



Factoriza las siguientes expresiones según corresponda:

1. $x^2 + 2ax - 15a^2 = (x + 5a)(x - 3a)$
3. $5 + 4x - x^2 = (-x + 5)(x + 1)$
5. $m^2 + mn - 56n^2 = (m + 8n)(m - 7n)$
7. $x^8 + x^4 - 240 = (x^4 + 16)(x^4 - 15)$
9. $a^4b^4 - 2a^2b^2 - 99 = (a^2b^2 - 11)(a^2b^2 + 9)$
11. $x^6 - 6x^3 - 7 = (x^3 - 7)(x^3 + 1)$
13. $x^2y^2 + xy - 12 = (xy + 4)(xy - 3)$
15. $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$
17. $9 - b^2 = (3 + b)(3 - b)$
19. $16 - n^2 = (4 + n)(4 - n)$
21. $1 - y^2 = (1 + y)(1 - y)$
23. $25 - 36x^4 = (5 + 6x^2)(5 - 6x^2)$
25. $4x^2 - 81y^4 = (2x + 9y^2)(2x - 9y^2)$
27. $100 - x^2y^6 = (10 + xy^3)(10 - xy^3)$
29. $25x^2y^4 - 121 = (5xy^2 + 11)(5xy^2 - 11)$
31. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
33. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
35. $a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$
37. $16 + 40x^2 + 25x^4 = (4 + 5x^2)^2$
39. $36 + 12m^2 + m^4 = (6 + m^2)^2$
41. $a^8 + 18a^4 + 81 = (a^4 + 9)^2$
43. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$
45. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2 = (1 + 7x^2y)^2$
47. $49m^6 - 70am^3 + 25a^2n^4 = (7m^3 - 5an^2)^2$
49. $x^2y^2 + 7xy - 18 = (xy + 9)(xy - 2)$
51. $16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$
53. $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$
55. $9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$
57. $x^2y^2z^2 - 2wxyz - 3w^2 = (xyz - 3w)(xyz + w)$
2. $a^2 - 4ab - 21b^2 = (a - 7b)(a + 3b)$
4. $x^{10} + x^5 - 20 = (x^5 + 5)(x^5 - 4)$
6. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2 = (x^2 + 12a)(x^2 - 5a)$
8. $15 + 2y - y^2 = (5 - y)(3 + y)$
10. $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 4)(x^2 + 1)$
12. $x^8 - 2x^4 - 80 = (x^4 - 10)(x^4 + 8)$
14. $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$
16. $1 - 4m^2 = (1 + 2m)(1 - 2m)$
18. $a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5)$
20. $4a^2 - 9 = (2a + 3)(2a - 3)$
22. $1 - 49a^2b^2 = (1 + 7ab)(1 - 7ab)$
24. $a^2b^8 - c^2 = (ab^4 + c)(ab^4 - c)$
26. $a^{10} - 49b^{12} = (a^5 + 7b^6)(a^5 - 7b^6)$
28. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
30. $y^4 + 1 + 2y^2 = (y^2 + 1)^2$
32. $9 - 6x + x^2 = (x - 3)^2$
34. $1 + 49a^2 - 14a = (7a - 1)^2$
36. $1 - 2a^3 + a^6 = (a^3 - 1)^2$
38. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 - b^3)^2$
40. $9b^2 - 30a^2b + 25a^2 = (3b - 5a)^2$
42. $1 + a^{10} - 2a^5 = (1 - a^5)^2$
44. $a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$
46. $1 - 2a^2 + a^4 = (a^2 - 1)^2$
48. $6a^2 + 11a + 3 = (3a + 1)(3a + 3)$
50. $10b^2 + 21b - 10 = (5b - 2)(2b + 5)$
52. $81 - 9x^2 = (9 + 3x)(9 - 3x)$
54. $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$
56. $25x^2 - 4 = (5x + 2)(5x - 2)$
58. $100m^2n^4 - 169y^6 = (10mn^2 + 13y^3)(10mn^2 - 13y^3)$

Factoriza sacando el factor común:

1. $120a + 120b + 120c = 120(a + b + c)$
3. $x^2 + x^3 - x^4 = x^2(1 + x - x^2)$
5. $40a^3 + 30a^2 - 50a = 10a(4a^2 + 3a - 5)$
7. $12xy^2 - 18y^3x^2 + 16xy = 2xy(6y - 9xy^2 + 8)$
2. $9a^2x - 18ax^2 = 9ax(a - 2x)$
4. $ab^2 - a^3b + ab = ab(b - a^2 + 1)$
6. $21c^4 + 7b^2c - 14b^3 = 7(3c^4 + b^2c - 2b^3)$
8. $b^3c^2 - 21c^2 + 14bc^2 = c^2(b^3 - 21 + 14b)$

$$9. 112mn^4 + 120m^5n - 136m^2n^2 = \\ 8mn(14n^3 + 15m^4 - 17mn)$$

$$11. 15y^2 + 20y^3 - 30y^4 + 40y^5 = \\ 5y^2(3 + 4y - 6y^2 + 8y^3)$$

$$13. m^3 + mn^2 - mn^4 + m = \\ m(m^2 + n^2 - n^4 + 1)$$

$$15. 5ab + 100a^2b - 155b^4c = \\ 5b(a + 20a^2 - 31b^3c)$$

$$17. -x^2y + y^3 + xy^4 - 4y = \\ y(-x^2 + y^2 + xy^3 - 4)$$

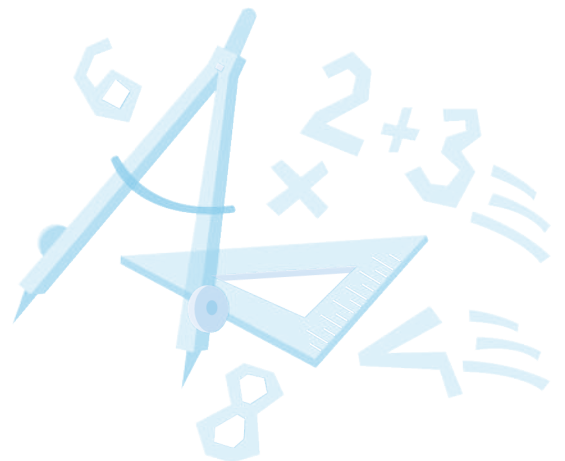
$$10. a^4b + a^2b^4 + a^5 + a^3b^3 = \\ a^2(a^2b + b^4 + a^3 + ab^3)$$

$$12. -hk^2 + 2hk + h^2 = \\ h(-k^2 + 2k + h)$$

$$14. a^3b^2 + b^2c + a^3b - b^2c = \\ b(a^3b + bc + a^3 - bc)$$

$$16. 25x^2y + 30xy^3 + 20x = \\ 5x(5xy + 6y^3 + 4)$$

$$18. 250m^5n^5 + 100m^2n^4 - 750m^4n^6 = \\ 50m^2n^4(5m^3n + 2 - 15m^2n^2)$$



JERARQUÍA DE OPERACIONES

La jerarquía de las operaciones es el orden que se debe seguir para resolver una operación y garantizar que el resultado es el correcto, dicho orden es:

- 1° se resuelven potencias y raíces.
 2° se resuelven multiplicaciones y divisiones.
 3° se resuelven adiciones y sustracciones.

Los paréntesis se cuentan independientes de la jerarquización, pero si la expresión los contiene se deben resolver primero independientemente de las operaciones indicadas en él (indistintamente del tipo de paréntesis que se usen () redondos, [] corchetes o { } llaves, matemáticamente se les da el mismo uso) y posteriormente se seguirá el orden mencionado anteriormente. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 4(3) + 5^2 - \sqrt{36} + 8 \\ 4(3) + 25 - 6 + 8 \\ 12 + 25 - 6 + 8 \\ 45 - 6 = 39 \end{aligned}$$

$$14(2) - 40 \div 5 - (2 + 18 - 5) + 32$$

Primero lo del paréntesis

$$14(2) - 40 \div 5 - (15) + 32 =$$

Quita paréntesis

$$14(2) - 40 \div 5 - 15 + 32 =$$

Se aplica la jerarquía de operaciones

$$14(2) - 40 \div 5 - 15 + 9$$

$$28 - 8 - 15 + 9 = 14$$

$$5x - [-3y + (2x + y) - 3x] - 5y$$

$$5x - [-3y + 2x + y - 3x] - 5y$$

$$5x + 3y - 2x - y + 3x - 5y$$

$$6x - 3y$$

Ejercicio:

Resuelve las siguientes operaciones:

a) $20 + 5(38) = 20 + 190 = 210$

b) $240 - 68 \div 4 = 240 - 17 = 223$

c) $250 \div 5(25) = 250 \div 125 = 2$

d) $(3 + 4)5 = 7(5) = 35$

e) $(5 - 2)(3 + 4) = (3)(7) = 21$

f) $2(3 + 4 - 5) = 2(2) = 4$

m) $3 \cdot 4 - 9 \div 3 + 2(4 - 1) = 12 - 3 + 2(3) = 12 - 3 + 6 = 15$

n) $[20 - (8 - 3)] - (9 - 4) = [20 - (5)] - (5) = 15 - 5 = 10$

ñ) $230 - 4(52) + 14 = 230 - 4(25) + 14 = 230 - 100 + 14 = 144$

o) $[(3 + 4)5] - 5 + (2 \cdot 5) = [7(5)] - 5 + (10) = 35 - 5 + 10 = 40$

p) $2 - 3[1 - 5 + 3(-2)] = 2 - 3[1 - 5 - 6] = 2 - 3[-10] = 2 + 30 = 32$

q) $3(-2) + 2(-2 \cdot 3 + 4) = -6 + 2(-6 + 4) = -6 + 2(-2) = -6 - 4 = -10$

r) $(2 \cdot 3 + 4 \cdot 3) \div 3 - 2 + 10 = (6 + 12) \div 3 - 2 + 10 = 18 \div 3 - 2 + 10 = 6 - 2 + 10 = 14$

s) $(2 - 8) + (5 - 7)(-9 + 6) - (-5 + 7) = -6 + (-2)(-3) - (2) = -6 + 6 - 2 = -2$

$$t) -3[-4 - 3(50 - 3)][2(2 - 4)] =$$

$$-3[-4 - 3(47)][2(-2)] = -3[-4 - 141][-4] = -3[-145][-4] = \underline{-1740}$$

$$u) -\{-7 + 11 - [-5 - (-2 + 3 - 5 + 4)]\} =$$

$$-\{-7 + 11 - [-5 - (0)]\} = -\{-7 + 11 - [-5]\} = -\{-7 + 11 + 5\} = -\{9\} = \underline{-9}$$

$$v) -4 - 3 - \{-6 + 4 + [-(-3 + 5)]\} + 3 - 2 = -4 - 3 - \{-6 + 4 + [-(-2)]\} + 3 - 2$$

$$= -4 - 3 - \{-6 + 4 - 2\} + 3 - 2 = -4 - 3 - \{-4\} + 3 - 2 = -4 - 3 + 4 + 3 - 2 = \underline{-2}$$

$$w) -4 - 5 - \{-4 + 6 + 7 - [-5 + 3 + (3 - 5 + 8) - 4] + 5 + 7 + 4\} = -4 - 5 - \{-4 + 6 + 7 - [-5 + 3 + (6) - 4] + 5 + 7 + 4\}$$

$$= -4 - 5 - \{-4 + 6 + 7 - [0] + 5 + 7 + 4\} = -4 - 5 - \{25\} = \underline{-34}$$

$$x) 84 - 6\{-5 + 9[-4 + 2(5 - 3 \cdot 2)]\} = 84 - 6\{-5 + 9[-4 + 2(5 - 6)]\} = 84 - 6\{-5 + 9[-4 + 2(-1)]\}$$

$$= 84 - 6\{-5 + 9[-4 - 2]\} = 84 - 6\{-5 + 9[-6]\} = 84 - 6\{-5 - 54\} = 84 - 6\{-59\} = 84 + 354 = \underline{438}$$

$$y) 9 - 3[7 - 2(-3)^2] - (4 - 5 - 2^2) - 3 - (-2)^3 = 9 - 3[7 - 2(9)] - (4 - 5 - 4) - 3 - (-8)$$

$$= 9 - 3[7 - 18] - (-5) - 3 + 8 = 9 - 3[-11] + 5 - 3 + 8 = 9 + 33 + 5 - 3 + 8 = \underline{52}$$

$$z) -6 - 7 - \{-4 + 8 + [-(-5 + 8)]\} + 7 - 6 = -6 - 7 - \{-4 + 8 + [-(-3)]\} + 7 - 6$$

$$= -6 - 7 - \{-4 + 8 - 3\} + 7 - 6 = -6 - 7 - \{-1\} + 7 - 6 = -6 - 7 + 1 + 7 - 6 = \underline{-11}$$

Resuelve las siguientes operaciones:

$$a) 5x - (2y - 3x) + 2y = 5x - 2y + 3x + 2y = \underline{8x}$$

$$b) 4a + (3b - 2a) = 4a + 3b - 2a = \underline{2a + 3b}$$

$$c) (3x - 1) + (2x - 5) = 3x - 1 + 2x - 5 = \underline{5x - 6}$$

$$d) (3x + 2y - 5z) + 2x - (5x - 2y + 6z) = 3x + 2y - 5z + 2x - 5x + 2y - 6z = \underline{4y - 11z}$$

$$e) -\{-2a + [30 - 40 - 5b]\} + 7b = -\{-2a + 30 - 40 - 5b\} + 7b$$

$$= 2a - 30 + 40 + 5b + 7b = \underline{2a + 12b + 10}$$

$$f) -3x - (3x + 6x - 2x) + 2x - 5x + (2x - 5x) = -3x - 3x - 6x + 2x + 2x - 5x + 2x - 5x = \underline{-16x}$$

$$g) 7x - \{3x + [-5y - (-2x + y) + 3x] - 2y\} = 7x - \{3x + [-5y + 2x - y + 3x] - 2y\}$$

$$= 7x - \{3x - 5y + 2x - y + 3x - 2y\} = 7x - 3x + 5y - 2x + y - 3x + 2y = \underline{-x + 8y}$$

$$h) [-5x + (3x + 2y) - (5x - 3y) + 7y] - 8x = [-5x + 3x + 2y - 5x + 3y + 7y] - 8x$$

$$= -5x + 3x + 2y - 5x + 3y + 7y - 8x = \underline{-15x + 12y}$$

$$i) -(4m + 3n) - (5m - 2n) + (7m - 5n) - 3n = -4m - 3n - 5m + 2n + 7m - 5n - 3n = \underline{-2m - 9n}$$

$$j) 6m + [2m - (3m + 4n) + (5m - 7n) - 3n] - 2n = 6m + [2m - 3m - 4n + 5m - 7n - 3n] - 2n = 6m + 2m - 3m - 4n + 5m - 7n - 3n - 2n = \underline{10m - 16n}$$

$$k) [2c + (4c + 3d) - 5d] + 3c - [-6c - (2c + 3d)] + 7d = [2c + 4c + 3d - 5d] + 3c - [-6c - 2c - 3d] + 7d = 2c + 4c + 3d - 5d + 3c + 6c + 2c + 3d + 7d = \underline{17c + 8d}$$

$$l) \{9x + [(3y - 2x)]\} - \{-5x - [-(9x + 3y) - 5x] - 2y\} + 7x = [9x + 3y - 2x] - \{-5x - [-9x - 3y - 5x] - 2y\} + 7x = 9x + 3y - 2x - \{-5x + 9x + 3y + 5x - 2y\} + 7x = 9x + 3y - 2x + 5x - 9x - 3y - 5x + 2y + 7x = \underline{5x + 2y}$$

$$m) (x - 2y)(3x - 4y)(7x + 9y) = (3x^2 - 4xy - 6xy + 8y^2)(7x + 9y) = (3x^2 - 10xy + 8y^2)(7x + 9y) = 21x^3 + 27x^2y - 70x^2y - 90xy^2 + 56xy^2 + 72y^3 = \underline{21x^3 - 43x^2y - 34xy^2 + 72y^3}$$

$$n) (5x^2 + 3x + 2)(4x - 3) - x^3 + 5x^4 = 20x^3 - 15x^2 + 12x^2 - 9x + 8x - 6 - x^3 + 5x^4 = \underline{5x^4 + 19x^3 - 3x^2 - x - 6}$$

$$\tilde{n}) 3(-5x^4 - 7x^2 - 5x - 1) - 4(x^4 - 2x^3 - 8x - 2) - (-6x^3 - 9x^2 - x + 1) = -15x^4 - 21x^2 - 15x - 3 - 4x^4 + 8x^3 + 32x + 8 + 6x^3 + 9x^2 + x - 1 = \underline{-19x^4 + 14x^3 - 12x^2 + 18x + 4}$$

$$o) (3a + 5b + 3c - 4(2a - 9b - 8c) - 5(a + 2b + 3c)) = (3a + 5b + 3c - 8a + 36b + 8c - 5a - 10b - 15c) = \underline{-10 + 31b - 5c}$$



ECUACIONES LINEALES DE LA FORMA $ax + bx + c = dx + ex + f$

Ecuación, igualdad condicionada al valor de una **incógnita**.

Incógnita, es la literal de la expresión que representa una cantidad desconocida, esto nos permite resolver problemas y encontrar uno o más datos desconocidos.

Ecuaciones de la forma $ax + bx + c = dx + ex + f$

$$3x + x + 8 = 2x + x + 6$$

1) Se agrupan los términos semejantes en un miembro de la ecuación y los independientes en el otro.

$$3x + x - 2x - x = + 6 - 8$$

2) Se hace una reducción de términos en ambos miembros.

$$4x - 3x = - 2$$

3) Se despeja la incógnita para encontrar el valor de x.

$$x = - 2$$

4) Se comprueba el resultado.

$$\begin{aligned} 3(-2) + (-2) + 8 &= 2(-2) + (-2) + 6 \\ -6 - 2 + 8 &= -4 - 2 + 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $3x + 4x + 30 = 84 + x + 2x$ $3x + 4x - x - 2x = 84 - 30$ $4x = 54$ $x = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$	2) $8 + 3x - 4x = -x - 3x + 29$ $3x - 4x + x + 3x = 29 - 8$ $3x = 21$ $x = \frac{21}{3} = 7$	3) $-2x - 4 = -x - 1$ $-2x + x = -1 + 4$ $-x = 3$ $-(-x = 3)$ $x = -3$
4) $3m = 5m + 6$ $3m - 5m = 6$ $-2m = 6$ $m = \frac{6}{-2} = -3$	5) $5x + 5 = 3x + 27$ $5x - 3x = 27 - 5$ $2x = 22$ $x = \frac{22}{2} = 11$	6) $200 + 7x = 100 - 2x$ $7x + 2x = 100 - 200$ $9x = -100$ $x = \frac{-100}{9}$

<p>7) $2x - 2 + 5 = 3x + 2$ $2x - 3x = 2 + 2 - 5$ $-x = -1$ $-(-x = -1)$ $x = 1$</p>	<p>8) $-x + 3 - 3x + 3 = 2x - 1$ $-x - 3x - 2x = -1 - 3 - 3$ $-6x = -7$ $x = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$</p>	<p>9) $4x + 1 = 3x - 1 + 6$ $4x - 3x = -1 + 6 - 1$ $x = 4$</p>
<p>10) $15 - 2x = 4x - 3 + x$ $-2x - 4x - x = -3 - 15$ $-7x = -18$ $x = \frac{-18}{-7} = \frac{18}{7}$</p>	<p>11) $5x + 6 = 2x$ $5x - 2x = -6$ $3x = -6$ $x = \frac{-6}{3} = -2$</p>	<p>12) $2x - 3 = 6 + x$ $2x - x = 6 + 3$ $x = 9$</p>
<p>13) $21x - 3 = 3x + 6$ $21x - 3x = 6 + 3$ $18x = 9$ $x = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$</p>	<p>14) $8x - 6 = 6x + 4$ $8x - 6x = 4 + 6$ $2x = 10$ $x = \frac{10}{2} = 5$</p>	<p>15) $12 + 7m = 2m + 22$ $7m - 2m = 22 - 12$ $5m = 10$ $x = \frac{10}{5} = 2$</p>
<p>16) $9 - 8y = 27 - 2y$ $-8y + 2y = 27 - 9$ $-6y = 18$ $y = \frac{18}{-6} = -3$</p>	<p>17) $2z + 9 = z + 1$ $2z - z = 1 - 9$ $z = -8$</p>	<p>18) $3w - 3 = 4w + 11$ $3w - 4w = 11 + 3$ $-w = 14$ $-(-w = 14)$ $w = -14$</p>
<p>19) $10h + 21 = 15 - 2h$ $10h + 2h = 15 - 21$ $12h = -6$ $h = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$</p>	<p>20) $11b - 5b + 6 = -24 - 9b$ $11b - 5b + 9b = -24 - 6$ $15b = -30$ $b = \frac{-30}{15} = -2$</p>	<p>21) $8d - 4 + 3d = 7d + d + 14$ $8d + 3d - 7d - d = 14 + 4$ $3d = 18$ $d = \frac{18}{3} = 6$</p>
<p>22) $-9k + 9 - 12k = 4k - 13 - 5k$ $-9k - 12k - 4k + 5k = -13 - 9$ $-20k = -22$ $k = \frac{-22}{-20} = \frac{11}{10}$</p>	<p>23) $2 - 3g = 13 + 4g$ $-3g - 4g = 13 - 2$ $-7g = 11$ $g = \frac{11}{-7}$</p>	<p>24) $4n - 6 + 5n = 18$ $4n + 5n = 18 + 6$ $9n = 24$ $n = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$</p>
<p>25) $2x + 8 - x = 6 - 2x - 7$ $2x - x + 2x = 6 - 7 - 8$ $3x = -9$ $x = \frac{-9}{3} = -3$</p>	<p>26) $3x - 5 = 2x - 3$ $3x - 2x = -3 + 5$ $x = 2$</p>	<p>27) $5h + 10 + 2h + 14 = 20 - h$ $5h + 2h + h = 20 - 10 - 14$ $8h = -4$ $h = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$</p>

28) $2t + 2 = 11 - t$

$2t + t = 11 - 2$

$3t = 9$

$$t = \frac{9}{3} = 3$$

29) $5x - 6 = 3x + 8$

$5x - 3x = 8 + 6$

$2x = 14$

$$x = \frac{14}{2} = 7$$

30) $3x - 5 = x + 3$

$3x - x = 3 + 5$

$2x = 8$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

31) $9y - 11 = -10 + 12y$

$9y - 12y = -10 + 11$

$-3y = 1$

$$y = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

32) $5c + 6c - 81 = 7c + 102 + 65c$

$5c + 6c - 7c - 65 = 102 + 81$

$-61c = 183$

$$c = \frac{183}{-61} = -3$$

33) $3e - 8 + 6e - 12 = e - 10 + 9e - 13$

$3e + 6e - e - 9e = -10 - 13 + 8 + 12$

$-e = -3$

$-(-e = -3)$

$$e = 3$$

34) $2r + 7 - 8r + 5 - 3r = 9 - r + 6 - 5r - 13$

$2r - 8r - 3r + r + 5r = 9 + 6 - 13 - 7 - 5$

$-3r = -10$

$$r = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$$

35) $3q + 101 - 4q - 33 = 108 - 16q - 100$

$3q - 4q + 16q = 108 - 100 - 101 + 33$

$15q = -60$

$$q = \frac{-60}{15} = -4$$

36) $2m - 4 - 8m + 9 = 10m + 6 + m - 12$

$2m - 8m - 10m - m = 6 - 12 + 4 - 9$

$-17m = -11$

$$m = \frac{-11}{-17} = \frac{11}{17}$$

37) $35 - 22a + 6 - 18a = 14 - 30a + 32$

$-22a - 18a + 30a = 14 + 32 - 35 - 6$

$-10a = 5$

$$a = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$$



ECUACIONES CON PARÉNTESIS

$$5(x + 3) + 9 + 3x = 20$$

1) Se eliminan los paréntesis realizando las operaciones indicadas en cada caso. (En este caso multiplicando).

$$5x + 15 + 9 + 3x = 20$$

2) Se agrupan las incógnitas en un miembro de la ecuación Y en el otro las constantes.

$$5x + 3x = 20 - 9 - 15$$

3) Se realizan las operaciones indicadas en cada miembro.

$$8x = -4$$

4) Se despeja la variable, si el resultado es fraccionario se simplifica al máximo.

$$x = \frac{-4}{8} = -0.5$$

5) Se comprueba el resultado.

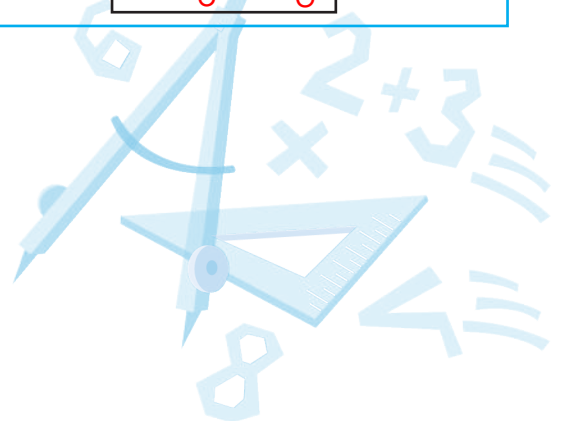
$$\begin{aligned} 5(-0.5) + 15 + 9 + 3(-0.5) &= 20 \\ -2.5 + 24 - 1.5 &= 20 \\ -4 + 24 &= 20 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

Ejercicio:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $x + 3(x + 2) = 18$ $x + 3x + 6 = 18$ $x + 3x = 18 - 6$ $4x = 12$ $x = \frac{12}{4} = 3$	2) $x + 4(x + 3) = 28$ $x + 4x + 12 = 28$ $x + 4x = 28 - 12$ $5x = 16$ $x = \frac{16}{5}$	3) $7(x - 3) = 5(x + 7)$ $7x - 21 = 5x + 35$ $7x - 5x = 35 + 21$ $2x = 56$ $x = \frac{56}{2} = 28$
---	---	--

4) $3 + 5(x - 7) = 3(x + 6)$ $3 + 5x - 35 = 3x + 18$ $5x - 3x = 18 - 3 + 35$ $2x = 50$ $x = \frac{50}{2} = 25$	5) $(-3 + x) = -2$ $-3 + x = -2$ $x = -2 + 3$ $x = 1$	6) $10(4 + x) = 50$ $40 + 10x = 50$ $10x = 50 - 40$ $10x = 10$ $x = \frac{10}{10} = 1$
7) $(7 + x) = 112$ $7 + x = 112$ $x = 112 - 7$ $x = 105$	8) $(x + 3) = 5(x - 3)$ $x + 3 = 5x - 15$ $x - 5x = -15 - 3$ $-4x = -18$ $x = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2}$	9) $-2(2 + x) = 2(-20 + x)$ $-4 - 2x = -40 + 2x$ $-2x - 2x = -40 + 4$ $-4x = -36$ $x = \frac{-36}{-4} = 9$
10) $-3(x - 2) = -1(x - 26)$ $-3x + 6 = -x + 26$ $-3x + x = 26 - 6$ $-2x = 20$ $x = \frac{20}{-2} = -10$	11) $3(6y) + 14 = 5y - 6$ $18y + 14 = 5y - 6$ $18y - 5y = -6 - 14$ $13y = -20$ $y = \frac{-20}{13}$	12) $2(2x - 5) = 3x - 1$ $4x - 10 = 3x - 1$ $4x - 3x = -1 + 10$ $x = 9$
13) $3(8m + 4) = 8(6m - 1) + 5$ $24m + 12 = 48m - 8 + 5$ $24m - 48m = -8 + 5 - 12$ $-24m = -15$ $m = \frac{-15}{-24} = \frac{5}{8}$	14) $4(8b + 9) = 1(4b - 4) + 6$ $32b + 36 = 4b - 4 + 6$ $32b - 4b = -4 + 6 - 36$ $28b = -34$ $b = \frac{-34}{28} = -\frac{17}{14}$	15) $8(8x + 6) = 4(8x - 1) + 1$ $64x + 48 = 32x - 4 + 1$ $64x - 32x = -4 + 1 - 48$ $32x = -51$ $x = \frac{-51}{32}$
16) $5(9c + 7) = 4(4c - 4) + 6$ $45c + 35 = 16c - 16 + 6$ $45c - 16c = -16 + 6 - 35$ $29c = -45$ $c = \frac{-45}{29}$	17) $12z - (3z - 1) - (2z - 35) = z + 58$ $12z - 3z + 1 - 2z + 35 = z + 58$ $12z - 3z - 2z - z = 58 - 1 - 35$ $6z = 22$ $z = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$	



$$\begin{aligned}18) \quad & 4(b + 1) + 9 = 2(3b - 4) + b \\ & 4b + 4 + 9 = 6b - 8 + b \\ & 4b - 6b - b = -8 - 4 - 9 \\ & -3b = -21\end{aligned}$$

$$b = \frac{-21}{-3} = 7$$

$$\begin{aligned}19) \quad & 5(2x - 1) + 3(x - 2) = 10(x + 1) \\ & 10x - 5 + 3x - 6 = 10x + 10 \\ & 10x + 3x - 10x = 10 + 5 + 6 \\ & 3x = 21\end{aligned}$$

$$x = \frac{21}{3} = 7$$

$$\begin{aligned}20) \quad & 4e - (3e - 4) = 6e - (3 - 8e) + (-2e + 29) \\ & 4e - 3e + 4 = 6e - 3 + 8e - 2e + 29 \\ & 4e - 3e - 6e - 8e + 2e = -3 + 29 - 4 \\ & -11e = 22\end{aligned}$$

$$e = \frac{22}{-11} = -2$$

$$\begin{aligned}21) \quad & 9f + (-2f + 8) = 3f + (5 - 6f) - (-5f - 18) \\ & 9f - 2f + 8 = 3f + 5 - 6f + 5f + 18 \\ & 9f - 2f - 3f + 6f - 5f = 5 + 18 - 8 \\ & 5f = 15\end{aligned}$$

$$f = \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{aligned}22) \quad & 4h - (3h - 10) = 2h - (8 - 5h) + (3h - 18) \\ & 4h - 3h + 10 = 2h - 8 + 5h + 3h - 18 \\ & 4h - 3h - 2h - 5h - 3h = -8 - 18 - 10 \\ & -9h = -36\end{aligned}$$

$$h = \frac{-36}{-9} = 4$$

$$\begin{aligned}23) \quad & 10k - (8k - 5) = 7k - (5 - 9k) + (-3k - 45) \\ & 10k - 8k + 5 = 7k - 5 + 9k - 3k - 45 \\ & 10k - 8k - 7k - 9k + 3k = -5 - 45 - 5 \\ & -11k = -55\end{aligned}$$

$$k = \frac{-55}{-11} = 5$$

$$\begin{aligned}24) \quad & 3(x - 2) - 6(3 - 2x) = 3(5x - 2) + 3(2x - x) \\ & 3x - 6 - 18 + 12x = 15x - 6 + 6x - 3x \\ & 3x + 12x - 15x - 6x + 3x = -6 + 6 + 18 \\ & -3x = 18\end{aligned}$$

$$x = \frac{18}{-3} = -6$$

$$\begin{aligned}25) \quad & 6w - (4w - 7) = 5w - (4 - 9w) + (-4w + 35) \\ & 6w - 4w + 7 = 5w - 4 + 9w - 4w + 35 \\ & 6w - 4w - 5w - 9w + 4w = -4 + 35 - 7 \\ & -8w = 24\end{aligned}$$

$$w = \frac{24}{-8} = -3$$

$$\begin{aligned}26) \quad & 4(w - 2) + 3(w + 5) = 2(w + 2) - 3(w - 4) + 17 \\ & 4w - 8 + 3w + 15 = 2w + 4 - 3w + 12 + 17 \\ & 4w + 3w - 2w + 3w = 4 + 12 + 17 + 8 - 15 \\ & 8w = 26\end{aligned}$$

$$w = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$$



$$\begin{aligned}27) \quad & 3(2n - 4) - 4(5 - 2n) = 3(n - 2) + 5(4n + n) + 2 \\& 6n - 12 - 20 + 8n = 3n - 6 + 20n + 5n + 2 \\& 6n + 8n - 3n - 20n - 5n = -6 + 2 + 12 + 20 \\& -14n = 28\end{aligned}$$

$$n = \frac{28}{-14} = -2$$

$$\begin{aligned}28) \quad & 3z + \{-7z + (-z + 9)\} = 33 - \{-(3z + 2) - (3z - 14)\} \\& 3z + \{-7z - z + 9\} = 33 - \{-3z - 2 - 3z + 14\} \\& 3z - 7z - z + 9 = 33 + 3z + 2 + 3z - 14 \\& 3z - 7z - z - 3z - 3z = 33 + 2 - 14 - 9 \\& -11z = 12\end{aligned}$$

$$z = \frac{12}{-11}$$

$$\begin{aligned}29) \quad & 9y + \{-6y + (-2y + 9)\} = -5 - \{-(7y + 3) - (-9y + 22)\} \\& 9y + \{-6y - 2y + 9\} = -5 - \{-7y - 3 + 9y - 22\} \\& 9y - 6y - 2y + 9 = -5 + 7y + 3 - 9y + 22 \\& 9y - 6y - 2y - 7y + 9y = -5 + 3 + 22 - 9 \\& 3y = 11\end{aligned}$$

$$y = \frac{11}{3}$$

$$\begin{aligned}30) \quad & 4m - \{-5m - (-3m + 10)\} = 18 + \{-(5m + 4) + (-7m + 12)\} \\& 4m - \{-5m + 3m - 10\} = 18 + \{-5m - 4 - 7m + 12\} \\& 4m + 5m - 3m + 10 = 18 - 5m - 4 - 7m + 12 \\& 4m + 5m - 3m + 5m + 7m = 18 - 4 + 12 - 10 \\& 18m = 16\end{aligned}$$

$$m = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$



SISTEMAS DE ECUACIONES

Hay varios métodos para poder resolver los sistemas de ecuaciones simultáneas:

- 1.- Por el método de sustitución.
- 2.- Por el método de reducción.
- 3.- Por el método de igualación.
- 4.- Por el método gráfico.

Método de sustitución

$$\begin{aligned} a + b &= 18 \text{ (1)} \\ a - b &= 6 \text{ (2)} \end{aligned}$$

1.- Se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones.

$$a = 18 - b \text{ (1)}$$

2.- Se sustituye ese valor en la otra ecuación y se resuelve la ecuación.

$$a - b = 6 \text{ (2)}$$

$$\begin{aligned} 18 - b - b &= 6 && \text{Ecuación con una sola incógnita} \\ 18 - 2b &= 6 \\ -2b &= 6 - 18 \\ -2b &= -12 \\ b &= \frac{-12}{-2} \end{aligned}$$

$$b = 6 \quad \text{Primer valor}$$

3.- Este primer valor se sustituye en alguna de las ecuaciones y se resuelve.

$$\begin{aligned} a + b &= 18 \text{ (1)} \\ a + 6 &= 18 \\ a &= 18 - 6 \end{aligned}$$

$$a = 12 \quad \text{Segundo valor}$$

4.- Se comprueban los valores hallados, en ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} a + b &= 18 \\ 12 + 6 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - b &= 6 \\ 12 - 6 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Si quedan identidades (valores iguales en ambos miembros) los valores encontrados son correctos.

Ejercicio:

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas.

<p>1) $7x + 4y = 13 \dots (1)$ $5x - 2y = 19 \dots (2)$ sust (3) en (1) $7\left(\frac{19 + 2y}{5}\right) + 4y = 13$ $\frac{133 + 14y}{5} = 13 - 4y$ $133 + 14y = 5(13 - 4y)$ sust "y" en (3) $x = \frac{19 + 2y}{5} = \frac{19 + 2(-2)}{5} = \frac{19 - 4}{5} = \frac{15}{5} = 3$</p> <p>desp "x" de (2) $x = \frac{19 + 2y}{5} \dots (3)$ $133 + 14y = 65 - 20y$ $14y + 20y = 65 - 133$ $34 = -68$ $y = \frac{-68}{34}$ $y = -2$</p>	<p>2) $5x + 6y = 10 \dots (1)$ $4x - 3y = -23 \dots (2)$ sust (3) en (1) $5\left(\frac{-23 + 3y}{4}\right) + 6y = 10$ $15y + 24y = 40 + 115$ $39y = 155$ $y = \frac{155}{39}$ sust "y" en (3) $x = \frac{-23 + 3\left(\frac{155}{39}\right)}{4} = \frac{-23 + \frac{155}{13}}{4} = \frac{\frac{-144}{13}}{\frac{4}{1}} = \frac{-144}{52} = \frac{-36}{13}$</p> <p>desp "x" de (2) $x = \frac{-23 + 3y}{4} \dots (3)$</p>
<p>3) $x + y = 2 \dots (1)$ $x - y = 6 \dots (2)$ sust (3) en (1) $6 + y + y = 2$ $6 + 2y = 2$ $2y = 2 - 6$ $2y = -4$ $y = \frac{-4}{2} = -2$</p> <p>desp "x" de (1) $x = 6 + y \dots (3)$ sust "y" en (3) $x = 6 + (-2)$ $x = 6 - 2$ $x = 4$</p>	<p>4) $x + 2y = 3 \dots (1)$ $5x - 3y = -11 \dots (2)$ sust (3) en (1) $5(3 - 2y) - 3y = -11$ $15 - 10y - 3y = -11$ $-13y = -11 - 15$ $-13y = -26$ $y = \frac{-26}{-13} = 2$</p> <p>desp "x" de (1) $x = 3 - 2y \dots (3)$ sust "y" en (3) $x = 3 - 2(2)$ $x = 3 - 4$ $x = -1$</p>
<p>5) $x + 2y = 3 \dots (1)$ $2x - y = 1 \dots (2)$ sust (3) en (1) $2(3 - 2y) - y = 1$ $16 - 4y - y = 1$ $-5y = 1 - 6$ $-5y = -5$ $y = \frac{-5}{-5} = 1$</p> <p>desp "x" de (1) $x = 3 - 2y \dots (3)$ sust "y" en (3) $x = 3 - 2(1)$ $x = 3 - 2$ $x = 1$</p>	<p>6) $2x + y = 5 \dots (1)$ $x + 3y = 5 \dots (2)$ sust (3) en (1) $x + 3(5 - 2x) = 5$ $x + 15 - 6x = 5$ $-5x = 5 - 15$ $x = \frac{-10}{-5} = 2$</p> <p>desp "y" de (1) $y = 5 - 2x \dots (3)$ sust "x" en (3) $y = 5 - 2(2)$ $y = 5 - 4$ $y = 1$</p>

$$7) \begin{aligned} -4x + y &= 20 \dots (1) \\ 6x - 9y &= 0 \dots (2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{desp "y" de (1)} \\ y &= 20 + 4x \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$6x - 9(20 + 4x) = 0$$

$$6x - 180 - 36x = 0$$

$$-30x = 180$$

$$x = \frac{180}{-30} = -6$$

sust "y" en (3)

$$y = 20 + 4(-6)$$

$$y = 20 - 24$$

$$y = -4$$

$$8) \begin{aligned} -3x - 4y &= 31 \dots (1) \\ 5x - 9y &= 11 \dots (2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{desp "x" de (2)} \\ x &= \frac{1 + 9y}{5} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (1)

$$-3\left(\frac{1 + 9y}{5}\right) = 31 + 4y$$

$$-33 - 27y = 5(31 + 4y)$$

$$-33 - 27y = 155 + 20y$$

$$\begin{aligned} -27y - 20y &= 155 + 33 \\ -47y &= 188 \end{aligned}$$

$$y = \frac{188}{-47} = -4$$

sust "y" en (3)

$$x = \frac{1 + 9(-4)}{5} = \frac{11 - 36}{5} = \frac{-25}{5} = -5$$

$$9) \begin{aligned} 14x - 11y &= 29 \dots (1) \\ -8x + 13y &= 30 \dots (2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{desp "x" de (1)} \\ x &= \frac{29 + 11y}{14} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$-8\left(\frac{29 + 11y}{14}\right) = 30 - 13y$$

$$-232 - 88y = 420 - 182y$$

$$-88y + 182y = 420 + 232$$

$$94y = 652$$

$$y = \frac{652}{94} = \frac{326}{47}$$

sust "y" en (3)

$$x = \frac{29 + 11\left(\frac{326}{47}\right)}{14} = \frac{29 + \frac{3586}{47}}{14} = \frac{\frac{4949}{47}}{\frac{14}{1}} = \frac{4949}{658} = \frac{707}{94}$$

$$10) \begin{aligned} 9x - 3y &= 18 \dots (1) \\ 2x + 8y &= -48 \dots (2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{desp "x" de (1)} \\ x &= \frac{18 + 3y}{9} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$2\left(\frac{18 + 3y}{9}\right) = -48 - 8y$$

$$2(18 + 3y) = 9(-48 - 8y)$$

$$36 + 6y = -432 - 72y$$

$$\begin{aligned} 6y + 72y &= -432 - 36 \\ 78y &= -468 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-468}{78} = -6$$

sust "y" en (3)

$$x = \frac{18 + 3(-6)}{9} = \frac{18 - 18}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

$$11) \begin{aligned} -8x + 14y &= -20 \dots (1) \\ -5x + 7y &= -16 \dots (2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{desp "y" de (2)} \\ y &= \frac{-16 + 5x}{7} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (1)

$$14\left(\frac{-16 + 5x}{7}\right) = -20 + 8x$$

$$(-16 + 5x) = 7(-20 + 8x)$$

$$-224 + 70x = -140 + 56x$$

$$\begin{aligned} 70x - 56x &= -140 + 224 \\ 14x &= 84 \end{aligned}$$

$$x = \frac{84}{14} = 6$$

sust "x" en (3)

$$y = \frac{-16 + 5(6)}{7} = \frac{-16 + 30}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$12) \begin{aligned} 5x - 9y &= 139 \dots (1) \\ 15x + 2y &= 98 \dots (2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{desp "x" de (1)} \\ x &= \frac{139 + 9y}{5} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$15\left(\frac{139 + 9y}{5}\right) = 98 - 2y$$

$$15(139 + 9y) = 5(98 - 2y)$$

$$2085 + 135y = 490 - 10y$$

$$\begin{aligned} 135y + 10y &= 490 - 2085 \\ 145y &= -1695 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-1695}{145} = -11$$

sust "y" en (3)

$$x = \frac{139 + 9(-11)}{5} = \frac{139 - 99}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\begin{aligned} 13) \quad & 10x + 4y = -34 \dots (1) && \text{desp "y" de (2)} \\ & -5x + 2y = 13 \dots (2) && y = \frac{13 + 5x}{2} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$\begin{aligned} 10x + 4\left(\frac{13 + 5x}{2}\right) &= -34 \\ 4\left(\frac{13 + 5x}{2}\right) &= -34 - 10x \\ 4(13 + 5x) &= 2(-34 - 10x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 52 + 20x &= -68 - 20x \\ 20x + 20x &= -68 - 20x \\ 40x &= -120 \\ x &= \frac{-120}{40} = -3 \end{aligned}$$

sust "x" en (3)

$$y = \frac{13 + 5(-3)}{2} = \frac{13 - 15}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\begin{aligned} 14) \quad & 2x - 3y = 12 \dots (1) && \text{desp "x" de (1)} \\ & -4x + 5y = -14 \dots (2) && y = \frac{12 + 3y}{2} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$\begin{aligned} -4\left(\frac{12 + 3y}{2}\right) + 5y &= -14 \\ -4\left(\frac{12 + 3y}{2}\right) &= -14 - 5y \\ -4(12 + 3y) &= 2(-14 - 5y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -48 - 12y &= -28 - 10y \\ -12y + 10y &= -28 + 48 \\ -2y &= 20 \\ y &= \frac{20}{-2} = -10 \end{aligned}$$

sust "y" en (3)

$$x = \frac{12 + 3(-10)}{2} = \frac{12 - 30}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

$$\begin{aligned} 15) \quad & -3x + 2y = -9 \dots (1) && \text{desp "y" de (1)} \\ & 4x - 5y = 26 \dots (2) && y = \frac{-9 + 3x}{2} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (2)

$$\begin{aligned} 4x - 5\left(\frac{-9 + 3x}{2}\right) &= 26 \\ -5\left(\frac{-9 + 3x}{2}\right) &= 26 - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5(-9 + 3x) &= 2(26 - 4x) \\ 45 - 15x &= 52 - 8x \\ -15x + 8x &= 52 - 45 \\ -7x &= 7 \\ x &= \frac{7}{-7} = -1 \end{aligned}$$

sust "x" en (3)

$$y = \frac{-9 + 3(-1)}{2} = \frac{-9 - 3}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$\begin{aligned} 16) \quad & 6x + 4y = 7 \dots (1) && \text{desp "y" de (2)} \\ & -9x + 16y = 17 \dots (2) && y = \frac{17 + 9x}{16} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (1)

$$\begin{aligned} 6x + 4\left(\frac{17 + 9x}{16}\right) &= 7 \\ 4\left(\frac{17 + 9x}{16}\right) &= 7 - 6x \\ 4(17 + 9x) &= 16(7 - 6x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68 + 36x &= 112 - 96x \\ 36x + 96x &= 112 - 68 \\ 132x &= 44 \\ x &= \frac{44}{132} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

sust "x" en (3)

$$y = \frac{17 + 9\left(\frac{1}{3}\right)}{16} = \frac{17 + \frac{9}{3}}{16} = \frac{17 + 3}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} 17) \quad & x + 2y = 5 \dots (1) && \text{desp "x" de (1)} \\ & 3x - 6y = -9 \dots (2) && x = 5 - 2y \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (1)

$$\begin{aligned} 3(5 - 2y) - 6y &= -9 \\ 15 - 6y - 6y &= -9 \\ -12y &= -9 - 15 \\ -12y &= -24 \\ y &= \frac{-24}{-12} = 2 \end{aligned}$$

sust "y" en (3)

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2(2) \\ x &= 5 - 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18) \quad & 6x + 14y = 9 \dots (1) && \text{desp "y" de (2)} \\ & 3x + 2y = -3 \dots (2) && y = \frac{-3 - 3x}{2} \dots (3) \end{aligned}$$

sust (3) en (1)

$$\begin{aligned} 6x + 14\left(\frac{-3 - 3x}{2}\right) &= 9 \\ 14\left(\frac{-3 - 3x}{2}\right) &= 9 - 6x \\ 14(-3 - 3x) &= 2(9 - 6x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -42 - 42x &= 18 - 12x \\ -42x + 12x &= 18 + 42 \\ -30x &= 60 \\ x &= \frac{60}{-30} = -2 \end{aligned}$$

sust "x" en (3)

$$y = \frac{-3 - 3(-2)}{2} = \frac{-3 + 6}{2} = \frac{3}{2}$$

19) $x + y = 12 \dots (1)$

$x - y = 2 \dots (2)$

sust (3) en (2)

$(12 - y) - y = 2$

$12 - 2y = 2$

$-2y = 2 - 12$

$-2y = -10$

$y = \frac{-10}{-2} = 5$

desp "x" de (1)

$x = 12 - y \dots (3)$

Sust "y" de (3)

$x = 12 - 5$

$x = 7$

20) $3x + 5y = 7 \dots (1)$

$2x - y = -4 \dots (2)$

desp "x" de (2)

$x = \frac{-4 + y}{2} \dots (3)$

sust (3) en (1)

$3\left(\frac{-4 + y}{2}\right) + 5y = 7$

$3\left(\frac{-4 + y}{2}\right) = 7 - 5y$

$3(-4 + y) = 2(7 - 5y)$

sust "y" en (3)

$x = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$-12 + 3y = 14 - 10y$

$3y + 10y = 14 + 12$

$13y = 26$

$y = \frac{26}{13} = 2$

Método por reducción

$x + 2y = 8 \dots (1)$

$x + 5y = 20 \dots (2)$

Se restan ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ -x - 5y = -20 \\ \hline -3y = -12 \end{array}$$

$y = \frac{-12}{-3}$

$y = 4$

Se sustituyen el valor de "y" en cualquiera de las 2 ecuaciones

Lo haremos en la (1)

$x + 2y = 8 \dots (1)$

$x + 2(4) = 8$

$x + 8 = 8$

$x = 0$

Respuesta:

$x = 0$

$y = 4$



Ejercicio:

Ahora desarrolla y comprueba los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

<p>1) $2(x - y = 2) \dots\dots(1)$ $-1(2x + 3y = 19) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 2x - 2y = 4 \\ -2x - 3y = -19 \\ \hline -5y = -15 \\ y = \frac{-15}{-5} = 3 \end{array}$ <p>Sust "y" en (1) $x - y = 2$ $x - 3 = 2$ $x = 2 + 3$ $x = 5$</p> <p>comprobación $x - y = 2$ $5 - 3 = 2$</p>	<p>2) $1(5x + 3y = 13) \dots\dots(1)$ $-5(x - y = -11) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 5x + 3y = 13 \\ -5x + 5y = 55 \\ \hline 8y = 68 \\ y = \frac{68}{8} = \frac{17}{2} \end{array}$ <p>Sust "y" en (2) $x - \frac{17}{2} = -11$ $x = -11 + \frac{17}{2}$ $x = -\frac{5}{2}$</p> <p>comprobación $x - y = -11$ $-\frac{5}{2} - \frac{17}{2} = -11$ $-11 = -11$</p>	<p>3) $3(2x - 2y = -5) \dots\dots(1)$ $-2(3x + 4y = -11) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 6x - 6y = -15 \\ -6x - 8y = 22 \\ \hline -14y = 7 \\ y = \frac{7}{-14} = -\frac{1}{2} \end{array}$ <p>Sust "y" en (1) $2x - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$ $2x + 1 = -5$ $2x = -5 - 1$ $2x = -6$ $x = \frac{-6}{2} = -3$</p> <p>comprobación $2(-3) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$ $-6 + 1 = -5$ $-5 = -5$</p>
<p>4) $2x + y = 8 \dots\dots(1)$ $3x - y = 7 \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 2x + y = 8 \\ 3x - y = 7 \\ \hline 5x = 15 \\ x = \frac{15}{5} = 3 \end{array}$ <p>Sust "x" en (1) $2(3) + y = 8$ $6 + y = 8$ $y = 8 - 6$ $y = 2$</p> <p>comprobación $2x + y = 8$ $2(3) + 2 = 8$ $6 + 2 = 8$ $8 = 8$</p>	<p>5) $8(3x + 4y = 8) \dots\dots(1)$ $-3(8x - 9y = -77) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 24x + 32y = 64 \\ -24x + 27y = 231 \\ \hline 59y = 295 \\ y = \frac{295}{59} = 5 \end{array}$ <p>Sust "y" en (1) $3x + 4(5) = 8$ $3x + 20 = 8$ $3x = 8 - 20$ $3x = -12$ $x = \frac{-12}{3} = -4$</p> <p>comprobación $3(-4) + 4(5) = 8$ $-12 + 20 = 8$ $8 = 8$</p>	<p>6) $2(6x - 5y = -3) \dots\dots(1)$ $-6(2x + 3y = 13) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 12x - 10y = -6 \\ -12x - 18y = -78 \\ \hline -28y = -84 \\ y = \frac{-84}{-28} = 3 \end{array}$ <p>Sust "y" en (1) $6x - 5(3) = -3$ $6x - 15 = -3$ $6x = -3 + 15$ $6x = 12$ $x = \frac{12}{6} = 2$</p> <p>comprobación $6(2) - 5(3) = -3$ $12 - 15 = -3$ $-3 = -3$</p>
<p>7) $2(x + 2y = 8) \dots\dots(1)$ $-1(2x + y = 7) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} 2x + 4y = 16 \\ -2x - y = -7 \\ \hline 3y = 9 \\ y = \frac{9}{3} = 3 \end{array}$ <p>Sust "y" en (2) $2x + 3 = 7$ $2x = 7 - 3$ $2x = 4$ $x = \frac{4}{2} = 2$</p> <p>comprobación $2(2) + 3 = 7$ $4 + 3 = 7$ $7 = 7$</p>	<p>8) $3(-2x + 3y = -12) \dots\dots(1)$ $2(3x - 4y = 15) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} -6x + 9y = -36 \\ 6x - 8y = 30 \\ \hline y = -6 \end{array}$ <p>Sust "y" en (2) $3x - 4(-6) = 15$ $3x + 24 = 15$ $3x = 15 - 24$ $3x = -9$ $x = \frac{-9}{3} = -3$</p> <p>comprobación $3(-3) - 4(-6) = 15$ $-9 + 24 = 15$ $15 = 15$</p>	<p>9) $-6(5a - 7b = 10) \dots\dots(1)$ $5(8b - 6a = -12) \dots\dots(2)$</p> $\begin{array}{r} -30a + 42b = -60 \\ 30a - 40b = 60 \\ \hline 2b = 0 \\ b = \frac{0}{2} = 0 \end{array}$ <p>Sust "b" en (1) $5a - 7(0) = 10$ $5a = 10$ $a = \frac{10}{5} = 2$</p> <p>comprobación $8(0) - 6(2) = -12$ $0 - 12 = -12$</p>

$$10) \begin{cases} 3(4m + 9n = -35) \dots (1) \\ -4(3m - 8n = 18) \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 12m + 27n = -105 \\ -12m + 32n = -72 \\ \hline 59n = -177 \\ n = \frac{-177}{59} = -3 \end{array}$$

Sust "n" en (2)

$$\begin{aligned} 3m - 8(-3) &= 18 \\ 3m + 24 &= 18 \\ 3m &= 18 - 24 \\ 3m &= -6 \\ m &= \frac{-6}{3} = -2 \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 3(-2) - 8(-3) &= 18 \\ -6 + 24 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

$$11) \begin{cases} 15(10m - 3n = 19) \dots (1) \\ -10(15m - 24n = 35) \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 150m - 45n = 285 \\ -150m + 240n = -350 \\ \hline 195n = -65 \\ n = \frac{-65}{195} = -\frac{1}{3} \end{array}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 15\left(\frac{9}{5}\right) - 24\left(-\frac{1}{3}\right) &= 35 \\ 27 + 8 &= 35 \\ 35 &= 35 \end{aligned}$$

Sust "n" en (1)

$$\begin{aligned} 10m - 3\left(-\frac{1}{3}\right) &= 19 \\ 10m + 1 &= 19 \\ 10m &= 19 - 1 \\ 10m &= 18 \\ m &= \frac{18}{10} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$12) \begin{cases} 3(7a - 10b = -64) \dots (1) \\ -7(5b + 3a = 19) \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 21a - 30b = -192 \\ -21a - 35b = -133 \\ \hline -65b = -325 \\ b = \frac{-325}{-65} = 5 \end{array}$$

Sust "b" en (2)

$$\begin{aligned} 5(5) + 3a &= 19 \\ 25 + 3a &= 19 \\ 3a &= 19 - 25 \\ 3a &= -6 \\ a &= \frac{-6}{3} = -2 \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 5(5) + 3(-2) &= 19 \\ 25 - 6 &= 19 \\ 19 &= 19 \end{aligned}$$

$$13) \begin{cases} 2(3x - 8y = -13) \dots (1) \\ -3(5y + 2x = -19) \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 16y = -26 \\ -6x - 15y = 57 \\ \hline -31y = 31 \\ y = \frac{31}{-31} = -1 \end{array}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 5(-1) + 2(-7) &= -19 \\ -5 - 14 &= -19 \\ -19 &= -19 \end{aligned}$$

Sust "y" en (2)

$$\begin{aligned} 5(-1) + 2x &= -19 \\ -5 + 2x &= -19 \\ 2x &= -19 + 5 \\ 2x &= -14 \\ x &= \frac{-14}{2} = -7 \end{aligned}$$

$$14) \begin{cases} 9(3m - 5n = 1) \dots (1) \\ -3(9m + 15n = 9) \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 27m - 45n = 9 \\ -27m - 45n = -27 \\ \hline -90n = -18 \\ n = \frac{-18}{-90} = \frac{1}{5} \end{array}$$

Sust "n" en (1)

$$\begin{aligned} 3m - 5\left(\frac{1}{5}\right) &= 1 \\ 3m - 1 &= 1 \\ 3m &= 1 + 1 \\ 3m &= 2 \\ m &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{2}{3}\right) - 5\left(\frac{1}{5}\right) &= 1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$15) \begin{cases} x - 2y = 11 \dots (1) \\ -(x + 5y = -17) \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - 2y = 11 \\ -x - 5y = 17 \\ \hline -7y = 28 \\ y = \frac{28}{-7} = -4 \end{array}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 3 - 2(-4) &= 11 \\ 3 + 8 &= 11 \\ 11 &= 11 \end{aligned}$$

Sust "y" en (1)

$$\begin{aligned} x - 2(-4) &= 11 \\ x + 8 &= 11 \\ x &= 11 - 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$16) \begin{aligned} 4(-m + n &= -1) \dots (1) \\ 1(4m - 2n &= 5) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ -4m + 4n &= -4 \\ \underline{4m - 2n} &= \underline{5} \\ 2n &= 1 \\ n &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

comprobación

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = -1 \\ -1 = -1$$

Sust "n" en (1)

$$\begin{aligned} -m + \frac{1}{2} &= -1 \\ -m &= -1 - \frac{1}{2} \\ (-m &= -\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$m = \frac{3}{2}$$

$$17) \begin{aligned} -6(2b + c &= 1) \dots (1) \\ -2(-5c - 6b &= -9) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ -12b - 6c &= -6 \\ \underline{12b + 10c} &= \underline{18} \\ 4c &= 12 \\ c &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 2(-1) + 3 &= 1 \\ -2 + 3 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Sust "n" en (1)

$$\begin{aligned} 2b + 3 &= 1 \\ 2b &= 1 - 3 \\ 2b &= -2 \\ b &= \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$18) \begin{aligned} 8(6u - 3v &= 7) \dots (1) \\ -6(8u - 5v &= 10) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ 48u - 24v &= 56 \\ \underline{-48u + 30v} &= \underline{-60} \\ 6v &= -4 \\ v &= \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 6\left(\frac{5}{6}\right) - 3\left(-\frac{2}{3}\right) &= 7 \\ 5 + 2 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Sust "v" en (1)

$$\begin{aligned} 6u - 3\left(-\frac{2}{3}\right) &= 7 \\ 6u + 2 &= 7 \\ 6u &= 7 - 2 \\ 6u &= 5 \\ u &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$19) \begin{aligned} 5(3x - 4y &= 32) \dots (1) \\ -3(5x + y &= 38) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ 15x - 20y &= 160 \\ \underline{-15x - 3y} &= \underline{-114} \\ -23y &= 46 \\ y &= \frac{46}{-23} = -2 \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 3(8) - 4(-2) &= 32 \\ 24 + 8 &= 32 \\ 32 &= 32 \end{aligned}$$

Sust "y" en (1)

$$\begin{aligned} 3x - 4(-2) &= 32 \\ 3x + 8 &= 32 \\ 3x &= 32 - 8 \\ 3x &= 24 \\ x &= \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

$$20) \begin{aligned} -8(6r - 5v &= -11) \dots (1) \\ -6(7v - 8r &= 15) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ -48r + 40v &= 88 \\ \underline{48r - 42v} &= \underline{-90} \\ -2v &= -2 \\ v &= \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 6(-1) - 5(1) &= -11 \\ -6 - 5 &= -11 \\ -11 &= -11 \end{aligned}$$

Sust "v" en (1)

$$\begin{aligned} 6r - 5(1) &= -11 \\ 6r - 5 &= -11 \\ 6r &= -11 + 5 \\ 6r &= -6 \\ r &= \frac{-6}{6} = -1 \end{aligned}$$

$$21) \begin{aligned} 5(7x - y &= 75) \dots (1) \\ -7(5x - 2y &= 42) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ 35x - 5y &= 375 \\ \underline{-35x + 14y} &= \underline{-294} \\ 9y &= 81 \\ y &= \frac{81}{9} = 9 \end{aligned}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 5(12) - 2(9) &= 42 \\ 60 - 18 &= 42 \\ 42 &= 42 \end{aligned}$$

Sust "y" en (2)

$$\begin{aligned} 5x - 2(9) &= 42 \\ 5x - 18 &= 42 \\ 5x &= 42 + 18 \\ 5x &= 60 \\ x &= \frac{60}{5} = 12 \end{aligned}$$

$$22) \begin{aligned} 5(7p - 3q &= -28) \dots (1) \\ -7(5p - 4q &= 16) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 35p - 15q = -140 \\ -35p + 28q = -112 \\ \hline +13q = -252 \end{array}$$

$$q = \frac{-252}{13}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 5\left(-\frac{160}{13}\right) - 4\left(-\frac{252}{13}\right) &= 16 \\ -\frac{800}{13} + \frac{1008}{13} &= 16 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

Sust "q" en (2)

$$5p - 4\left(-\frac{252}{13}\right) = 16$$

$$5p + \frac{1008}{13} = 16$$

$$5p = 16 - \frac{1008}{13}$$

$$5p = -\frac{800}{13} \quad p = -\frac{160}{13}$$

$$23) \begin{aligned} 1(2x + y &= -10) \dots (1) \\ -2(x - 3y &= 2) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x + y = -10 \\ -2x + 6y = -4 \\ \hline +7y = -14 \end{array}$$

$$y = \frac{-14}{7} = -2$$

comprobación

$$\begin{aligned} -4 - 3(-2) &= 2 \\ -4 + 6 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Sust "y" en (2)

$$x - 3(-2) = 2$$

$$x + 6 = 2$$

$$x = 2 - 6$$

$$x = -4$$

$$24) \begin{aligned} -12(9x - 2y &= -3) \dots (1) \\ -9(7y - 12x &= 17) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -108x + 24y = 36 \\ 108x - 63y = -153 \\ \hline -39y = -117 \end{array}$$

$$y = \frac{-117}{-39} = 3$$

comprobación

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{1}{3}\right) - 2(3) &= -3 \\ 3 - 6 &= -3 \\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

Sust "y" en (1)

$$9x - 2(3) = -3$$

$$9x - 6 = -3$$

$$9x = -3 + 6$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$25) \begin{aligned} 2(8p - 3q &= 8) \dots (1) \\ -8(2p + 9q &= 15) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 16p - 6q = 16 \\ -16p - 72q = -120 \\ \hline -78q = -104 \end{array}$$

$$q = \frac{-104}{-78} = \frac{4}{3}$$

comprobación

$$\begin{aligned} 8\left(\frac{3}{2}\right) - 3\left(\frac{4}{3}\right) &= 8 \\ 12 - 4 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Sust "q" en (1)

$$8p - 3\left(\frac{4}{3}\right) = 8$$

$$8p - 4 = 8$$

$$8p = 8 + 4$$

$$8p = 12$$

$$p = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$26) \begin{aligned} 5(2m - 5n &= 14) \dots (1) \\ -2(5m + 2n &= -23) \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 10m - 25n = 70 \\ -10m - 4n = 46 \\ \hline -29n = 116 \end{array}$$

$$n = \frac{116}{-29} = -4$$

comprobación

$$\begin{aligned} 2(-3) - 5(-4) &= 14 \\ -6 + 20 &= 14 \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

Sust "n" en (1)

$$2m - 5(-4) = 14$$

$$2m + 20 = 14$$

$$2m = 14 - 20$$

$$2m = -6$$

$$m = \frac{-6}{2} = -3$$

Método por igualación

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= -10 \dots(1) \\ 4x + y &= 25 \dots (2) \end{aligned}$$

Se despeja "x" en (1) y en (2).

$$(1) \quad x = \frac{-10 + 5y}{3} \dots(3)$$

$$(2) \quad x = \frac{25 - y}{4} \dots\dots(4)$$

Se igualan (3) y (4) y se encuentra el valor de "y" en la ecuación:

$$\frac{-10 + 5y}{3} = \frac{25 - y}{4}$$

Se resuelve la ecuación.

$$\begin{aligned} -40 + 20y &= 75 - 3y \\ 20y + 3y &= 75 + 40 \\ 23y &= 115 \\ y &= \frac{115}{23} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

En ecuación (2) se sustituye el valor obtenido de "y".

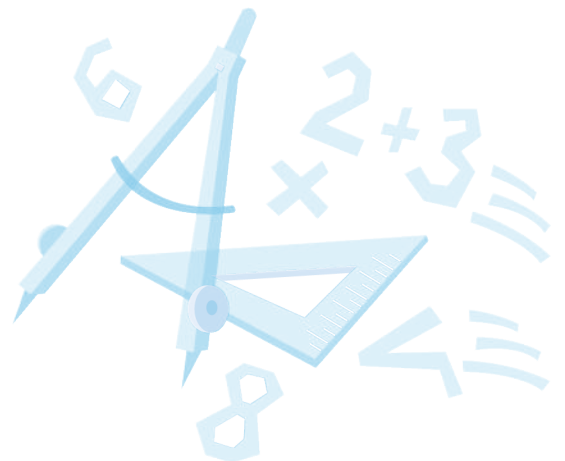
$$\begin{aligned} 4x + y &= 25 \\ 4x + 5 &= 25 \\ 2x &= 20 \\ x &= \frac{20}{2} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Ejercicio

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas.



$$\begin{aligned} 1) \quad & 3x + 2y = 24 \dots (1) \\ & 4x + y = 22 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{24 - 2y}{3} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{22 - y}{4} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$4x + 6 = 22$$

$$4x = 22 - 6$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4} = 4$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{24 - 2y}{3} = \frac{22 - y}{4}$$

$$4(24 - 2y) = 3(22 - y)$$

$$96 - 8y = 66 - 3y$$

$$-8y + 3y = 66 - 96$$

$$-5y = -30$$

$$y = \frac{-30}{-5} = 6$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x + 3y = 8 \dots (1) \\ & x - y = 4 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = 8 - 3y \dots (3)$$

$$(2) \quad x = 4 + y \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$x - 1 = 4$$

$$x = 4 + 1$$

$$x = 5$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$8 - 3y = 4 + y$$

$$-3y - y = 4 - 8$$

$$-4y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 3x - 4y = 41 \dots (1) \\ & 11x + 6y = 47 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{41 + 4y}{3} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{47 - 6y}{11} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$11x + 6(-5) = 47$$

$$11x - 30 = 47$$

$$11x = 47 + 30$$

$$11x = 77$$

$$x = \frac{77}{11} = 7$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{41 + 4y}{3} = \frac{47 - 6y}{11}$$

$$11(41 + 4y) = 3(47 - 6y)$$

$$451 + 44y = 141 - 18y$$

$$44y + 18y = 141 - 451$$

$$62y = -310$$

$$y = \frac{-310}{62} = -5$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & x + y = 4 \dots (1) \\ & x - y = 2 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = 4 - y \dots (3)$$

$$(2) \quad x = 2 + y \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$x - 1 = 2$$

$$x = 2 + 1$$

$$x = 3$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$4 - y = 2 + y$$

$$-y - y = 2 - 4$$

$$-2y = -2$$

$$y = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & 3m + 2n = 5 \dots (1) \\ & 5m + n = -1 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad m = \frac{5 - 2n}{3} \dots (3)$$

$$(2) \quad m = \frac{-1 - n}{5} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$5m + 4 = -1$$

$$5m = -1 - 4$$

$$5m = -5$$

$$m = \frac{-5}{5} = -1$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{5 - 2n}{3} = \frac{-1 - n}{5}$$

$$5(5 - 2n) = 3(-1 - n)$$

$$25 - 10n = -3 - 3n$$

$$-10n + 3n = -3 - 25$$

$$-7n = -28$$

$$n = \frac{-28}{-7} = 4$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 12x - 18y = 13 \dots (1) \\ & -12x + 30y = -19 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{13 + 18y}{12} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{-19 - 30y}{-12} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$-12x + 30\left(-\frac{1}{2}\right) = -19$$

$$-12x - 15 = -19$$

$$-12x = -19 + 15$$

$$-12x = -4$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{13 + 18y}{12} = \frac{-19 - 30y}{-12}$$

$$-12(13 + 18y) = 12(-19 - 30y)$$

$$-156 - 216y = -228 - 360y$$

$$-216y + 360y = -228 + 156$$

$$144y = -72$$

$$y = \frac{-72}{144} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

$$7) \begin{aligned} 7x + 2y &= -3 \dots (1) \\ 2x - 3y &= -8 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{-3 - 2y}{7} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{-8 + 3y}{2} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$2x - 3(2) = -8$$

$$2x - 6 = -8$$

$$2x = -8 + 6$$

$$2x = -2$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{-3 - y}{7} = \frac{-8 + 3y}{2}$$

$$2(-3 - 2y) = 7(-8 + 3y)$$

$$-6 - 4y = -56 + 21y$$

$$-4y - 21y = -56 + 6$$

$$-25y = -50$$

$$y = \frac{-50}{-25} = 2$$

$$8) \begin{aligned} 3x - 4y &= -26 \dots (1) \\ 2x - 3y &= -19 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{-26 + 4y}{3} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{-19 + 3y}{2} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$2x - 3(5) = -19$$

$$2x - 15 = -19$$

$$2x = -19 + 15$$

$$2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{-26 + 4y}{3} = \frac{-19 + 3y}{2}$$

$$2(-26 + 4y) = 3(-19 + 3y)$$

$$-52 + 8y = -57 + 9y$$

$$8y - 9y = -57 + 52$$

$$-(-y = -5)$$

$$y = 5$$

$$9) \begin{aligned} 6u + 4v &= 5 \dots (1) \\ 9u - 8v &= 4 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad u = \frac{5 - 4v}{6} \dots (3)$$

$$(2) \quad u = \frac{4 + 8v}{9} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$9u - 8\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

$$9u - 2 = 4$$

$$9u = 4 + 2$$

$$9u = 6$$

$$u = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{5 - 4v}{6} = \frac{4 + 8v}{9}$$

$$9(5 - 4v) = 6(4 + 8v)$$

$$45 - 36v = 24 + 48v$$

$$-36v - 48v = 24 - 45$$

$$-84v = -21$$

$$v = \frac{-21}{-84} = \frac{1}{4}$$

$$10) \begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \dots (1) \\ x - y &= -1 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{2y}{3} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = -1 + y \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$x - 3 = -1$$

$$x = -1 + 3$$

$$x = 2$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{2y}{3} = -1 + y$$

$$2y = 3(-1 + y)$$

$$2y = -3 + 3y$$

$$2y - 3y = -3$$

$$-(-y = -3)$$

$$y = 3$$

$$11) \begin{aligned} 5x - 2y &= 2 \dots (1) \\ 7x + 6y &= 38 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{2 + 2y}{5} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{38 - 6y}{7} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$7x + 6(4) = 38$$

$$7x + 24 = 38$$

$$7x = 38 - 24$$

$$7x = 14$$

$$x = \frac{14}{7} = 2$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{2 + 2y}{5} = \frac{38 - 6y}{7}$$

$$7(2 + 2y) = 5(38 - 6y)$$

$$14 + 14y = 190 - 30y$$

$$14y + 30y = 190 - 14$$

$$44y = 176$$

$$y = \frac{176}{44} = 4$$

$$12) \begin{aligned} 5d + 3b &= 21 \dots (1) \\ -2d + 4b &= 2 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad d = \frac{21 - 3b}{5} \dots (3)$$

$$(2) \quad d = \frac{2 - 4b}{-2} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$-21 + 4(2) = 2$$

$$-2d + 8 = 2$$

$$-2d = 2 - 8$$

$$-2d = -6$$

$$d = \frac{-6}{-2} = 3$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{21 - 3b}{5} = \frac{2 - 4b}{-2}$$

$$-2(21 - 3b) = 5(2 - 4b)$$

$$-42 + 6b = 10 - 20b$$

$$6b + 20b = 10 + 42$$

$$26b = 52$$

$$b = \frac{52}{26} = 2$$

$$13) \begin{aligned} x + y &= 2 \dots (1) \\ x - y &= 6 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = 2 - y \dots (3)$$

$$(2) \quad x = 6 + y \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$x - (-2) = 6$$

$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2$$

$$\boxed{x = 4}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$2 - y = 6 + y$$

$$-y - y = 6 - 2$$

$$-2y = 4$$

$$y = \frac{4}{-2} \boxed{= -2}$$

$$14) \begin{aligned} 5x - 3y &= -7 \dots (1) \\ 3x + 5y &= -11 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{-7 + 3y}{5} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{-11 - 5y}{3} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$3x + 5(-1) = -11$$

$$3x - 5 = -11$$

$$3x = -11 + 5$$

$$3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{3} \boxed{= -2}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{-7 + 3y}{5} = \frac{-11 - 5y}{3}$$

$$3(-7 + 3y) = 5(-11 - 5y)$$

$$-21 + 9y = -55 - 25y$$

$$9y + 25y = -55 + 21$$

$$34y = -34$$

$$y = \frac{-34}{34} \boxed{= -1}$$

$$15) \begin{aligned} 3x - 2y &= -2 \dots (1) \\ 4x + y &= 1 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{-2 + 2y}{3} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{1 - y}{4} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$4x + 1 = 1$$

$$4x = 1 - 1$$

$$4x = 0$$

$$x = \frac{0}{4} \boxed{= 0}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{-2 + 2y}{3} = \frac{1 - y}{4}$$

$$4(-2 + 2y) = 3(1 - y)$$

$$-8 + 8y = 3 - 3y$$

$$8y + 3y = 3 + 8$$

$$11y = 11$$

$$y = \frac{11}{11} \boxed{= 1}$$

$$16) \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \dots (1) \\ 5x + 4y &= 2 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{5 - 3y}{2} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{2 - 4y}{5} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$5x + 4(3) = 2$$

$$5x + 12 = 2$$

$$5x = 2 - 12$$

$$5x = -10$$

$$x = \frac{-10}{5} \boxed{= -2}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{5 - 3y}{2} = \frac{2 - 4y}{5}$$

$$5(5 - 3y) = 2(2 - 4y)$$

$$25 - 15y = 4 - 8y$$

$$-15y + 8y = 4 - 25$$

$$-7y = -21$$

$$y = \frac{-21}{-7} \boxed{= 3}$$

$$17) \begin{aligned} 2x + 5y &= 19 \dots (1) \\ 3x - 4y &= -6 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = \frac{19 - 5y}{2} \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{-6 + 4y}{3} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$3x - 4(3) = -6$$

$$3x - 12 = -6$$

$$3x = -6 + 12$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} \boxed{= 2}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$\frac{19 - 5y}{2} = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$3(19 - 5y) = 2(-6 + 4y)$$

$$57 - 15y = -12 + 8y$$

$$-15y - 8y = -12 - 57$$

$$-23y = -69$$

$$y = \frac{-69}{-23} \boxed{= 3}$$

$$18) \begin{aligned} x + 2y &= 3 \dots (1) \\ 5x - 3y &= -11 \dots (2) \end{aligned}$$

Desp "x" en (1) y (2)

$$(1) \quad x = 3 - 2y \dots (3)$$

$$(2) \quad x = \frac{-11 + 3y}{5} \dots (4)$$

Sust "y" en (2)

$$5x - 3(2) = -11$$

$$5x - 6 = -11$$

$$5x = -11 + 6$$

$$5x = -5$$

$$x = \frac{-5}{5} \boxed{= -1}$$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$$3 - 2y = \frac{-11 + 3y}{5}$$

$$5(3 - 2y) = -11 + 3y$$

$$15 - 10y = -11 + 3y$$

$$-10y - 3y = -11 - 15$$

$$-13y = -26$$

$$y = \frac{-26}{-13} \boxed{= 2}$$

19) $x + 2y = 4 \dots (1)$

$3x - y = 5 \dots (2)$

Desp "x" en (1) y (2)

(1) $x = 4 - 2y \dots (3)$

(2) $x = \frac{5+y}{3} \dots (4)$

Sust "y" en (2)

$3x - 1 = 5$

$3x = 5 + 1$

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3} = 2$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$4 - 2y = \frac{5+y}{3}$

$3(4 - 2y) = 5 + y$

$12 - 6y = 5 + y$

$-6y - y = 5 - 12$

$-7y = -7$

$y = \frac{-7}{-7} = 1$

20) $-x + y = -7 \dots (1)$

$5x + 3y = 3 \dots (2)$

Desp "x" en (1) y (2)

(1) $x = 7 + y \dots (3)$

(2) $x = \frac{3-3y}{5} \dots (4)$

Sust "y" en (2)

$5x + 3(-4) = 3$

$5x - 12 = 3$

$5x = 3 + 12$

$5x = 15$

$x = \frac{15}{5} = 3$

Igualar (3) y (4) y resolver ecuación

$7 + y = \frac{3-3y}{5}$

$5(7 + y) = 3 - 3y$

$35 + 5y = 3 - 3y$

$5y + 3y = 3 - 35$

$8y = -32$

$y = \frac{-32}{8} = -4$

Método gráfico

Cada ecuación representa una recta y el lugar en donde se cruzan las dos rectas es el punto que representa la solución de las ecuaciones, porque los valores de ese punto son los valores que resuelven las dos ecuaciones.

Observa cómo se resuelve de manera gráfica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 10x + 5y &= 60 \end{aligned}$$

Para graficar una ecuación se recomienda despejar una de las dos variables, y asignarle algunos valores a la que no se despejó. A esto se le llama **tabulación**.

$x + y = 9 \dots (1)$

$10x + 5y = 60 \dots (2)$

Se despeja y en ambas ecuaciones:

$y = 9 - x$

$y = \frac{60 - 10x}{5}$

$y = 12 - 2x$

Tabulamos ambos despejes:

$y = 9 - x$

Puntos	x	y
A	0	9
B	1	8
C	2	7
D	-1	10
E	-2	11

$y = 9 - 0 = 9$

$y = 9 - 1 = 8$

$y = 9 - 2 = 7$

$y = 9 + 1 = 10$

$y = 9 + 2 = 11$

$y = 12 - 2x$

Puntos	x	y
M	0	12
N	1	10
O	2	8
P	-1	14
Q	-2	16

$y = 12 - 2(0) = 12 - 0 = 12$

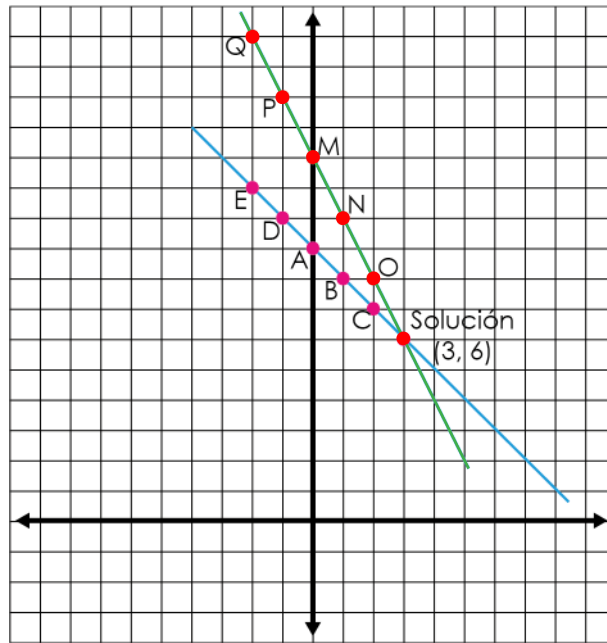
$y = 12 - 2(1) = 12 - 2 = 10$

$y = 12 - 2(2) = 12 - 4 = 8$

$y = 12 - 2(-1) = 12 + 2 = 14$

$y = 12 - 2(-2) = 12 + 4 = 16$

Se localiza en el plano cartesiano las coordenadas de los puntos:



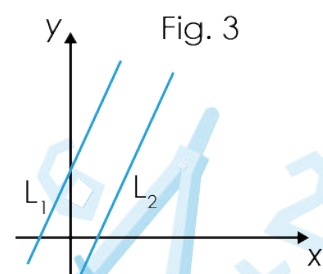
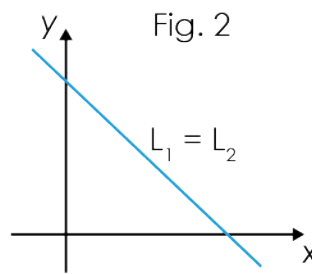
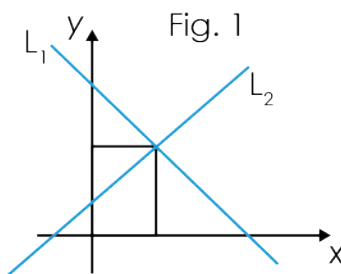
El punto de intersección de las dos rectas trazadas es la solución del sistema:

$$x = 3$$

$$y = 6$$

Es decir que para aplicar el **método gráfico** se realizan los siguientes pasos:

1. Se despeja la incógnita (y) en ambas ecuaciones.
2. Se construye para cada una de las ecuaciones la tabla de valores correspondientes.
3. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
4. Se hallan los puntos de intersección. Puede suceder los siguientes casos:
 - Las rectas se **intersecan en un punto**, cuyas coordenadas (a, b) es la solución del sistema (figura 1).
 - Las dos rectas **coinciden**, dando origen a infinitas soluciones (figura 2).
 - Las dos rectas son **paralelas (no se intersecan)**, por lo tanto, no hay solución (figura 3).



Ejercicio:

Ahora grafica los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x + y = 5 \dots (1) \\ & 2x - y = 4 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = 5 - x \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	7
B	-1	6
C	0	5
D	1	4
E	2	3

$$y = 5 - (-2) = 7$$

$$y = 5 - (-1) = 6$$

$$y = 5 - 0 = 5$$

$$y = 5 - 1 = 4$$

$$y = 5 - 2 = 3$$

$$y = -4 + 2x \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	-8
N	-1	-6
O	0	-4
P	1	-2
Q	2	0

$$y = -4 + 2(-2) = -4 - 4 = -8$$

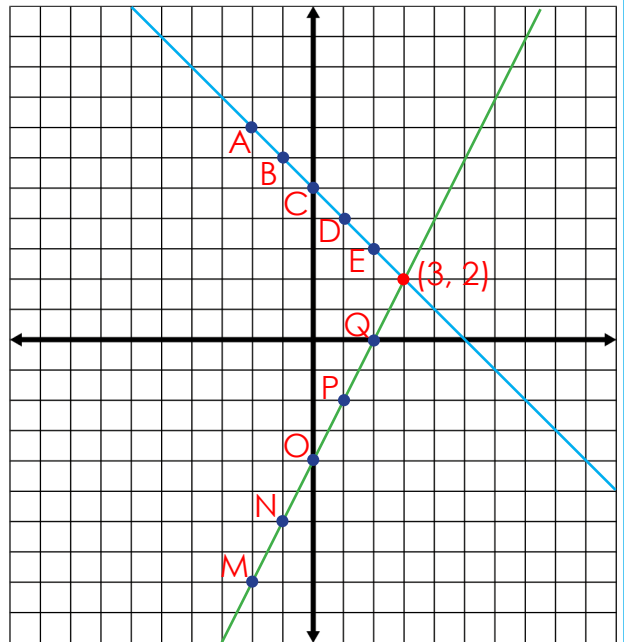
$$y = -4 + 2(-1) = -4 - 2 = -6$$

$$y = -4 + 2(0) = -4 + 0 = -4$$

$$y = -4 + 2(1) = -4 + 2 = -2$$

$$y = -4 + 2(2) = -4 + 4 = 0$$

$$R = (3, 2)$$



$$\begin{aligned} 2) \quad & 2x + 3y = 13 \dots (1) \\ & 5x - 2y = 4 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = \frac{13 - 2x}{3} \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	5.66
B	-1	5
C	0	4.33
D	1	3.66
E	2	3

$$y = \frac{13 - 2(-2)}{3} = 5.66$$

$$y = \frac{13 - 2(-1)}{3} = 5$$

$$y = \frac{13 - 2(0)}{3} = 4.33$$

$$y = \frac{13 - 2(1)}{3} = 3.66$$

$$y = \frac{13 - 2(2)}{3} = 3$$

$$y = \frac{4 - 5x}{-2} \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	-7
N	-1	-4.5
O	0	-2
P	1	0.5
Q	2	3

$$y = \frac{4 - 5(-2)}{-2} = -7$$

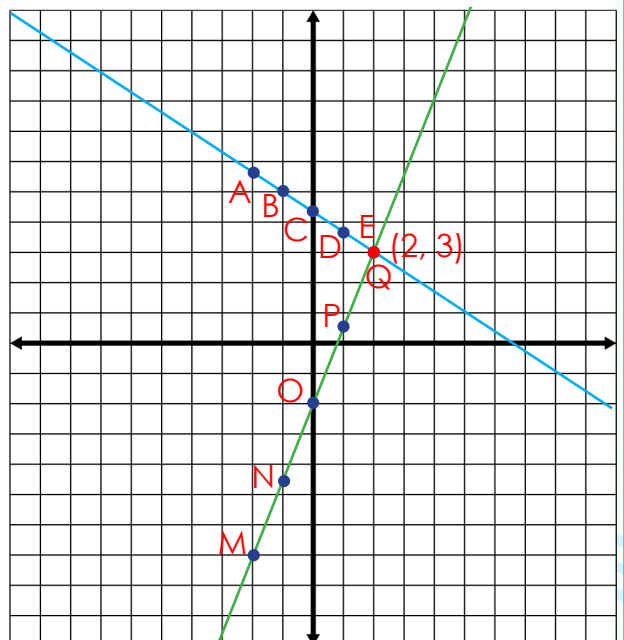
$$y = \frac{4 - 5(-1)}{-2} = -4.5$$

$$y = \frac{4 - 5(0)}{-2} = -2$$

$$y = \frac{4 - 5(1)}{-2} = 0.5$$

$$y = \frac{4 - 5(2)}{-2} = 3$$

$$R = (2, 3)$$



$$3) \begin{aligned} 2x - y &= 2 \dots (1) \\ x + y &= 4 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = -2 + 2x \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	-6
B	-1	-4
C	0	-2
D	1	0
E	2	2

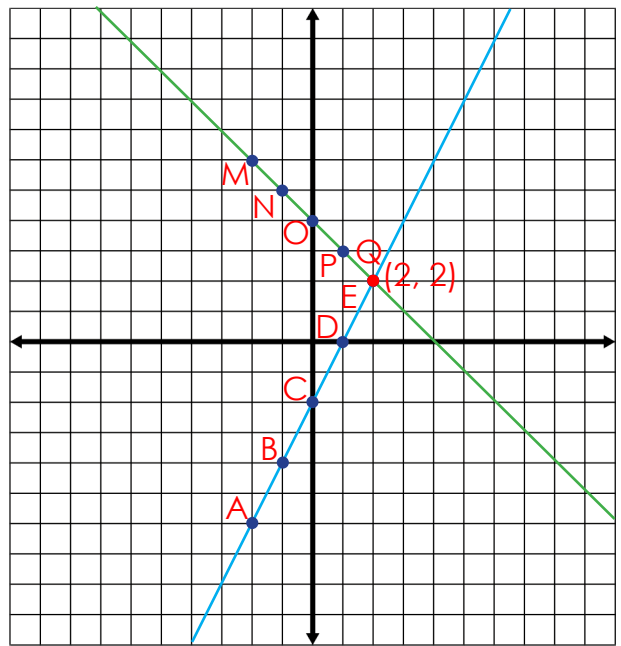
$$\begin{aligned} y &= -2 + 2(-2) = -6 \\ y &= -2 + 2(-1) = -4 \\ y &= -2 + 2(0) = -2 \\ y &= -2 + 2(1) = 0 \\ y &= -2 + 2(2) = 2 \end{aligned}$$

$$y = 4 - x \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	6
N	-1	5
O	0	4
P	1	3
Q	2	2

$$\begin{aligned} y &= 4 - (-2) = 6 \\ y &= 4 - (-1) = 5 \\ y &= 4 - 0 = 4 \\ y &= 4 - 1 = 3 \\ y &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

$$R = (2, 2)$$



$$4) \begin{aligned} x + y &= 5 \dots (1) \\ x - y &= 1 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = 5 - x \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	7
B	-1	6
C	0	5
D	1	4
E	2	3

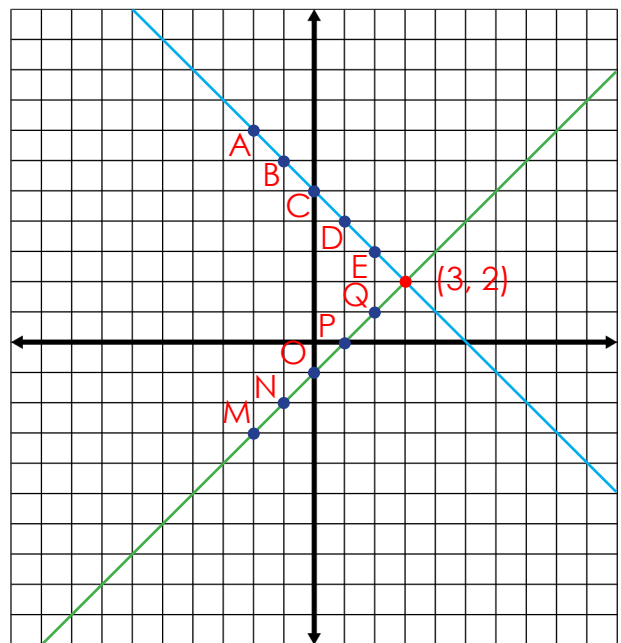
$$\begin{aligned} y &= 5 - (-2) = 7 \\ y &= 5 - (-1) = 6 \\ y &= 5 - 0 = 5 \\ y &= 5 - 1 = 4 \\ y &= 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$y = -1 + x \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	-3
N	-1	-2
O	0	-1
P	1	0
Q	2	1

$$\begin{aligned} y &= -1 + (-2) = -3 \\ y &= -1 + (-1) = -2 \\ y &= -1 + 0 = -1 \\ y &= -1 + 1 = 0 \\ y &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$R = (3, 2)$$



5) $5x + 3y = 13 \dots (1)$
 $4x + 6y = 14 \dots (2)$

$$y = \frac{13 - 5x}{3} \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	7.66
B	-1	6
C	0	4.33
D	1	2.66
E	2	1

$$y = \frac{13 - 5(-2)}{3} = 7.66$$

$$y = \frac{13 - 5(-1)}{3} = 6$$

$$y = \frac{13 - 5(0)}{3} = 4.33$$

$$y = \frac{13 - 5(1)}{3} = 2.66$$

$$y = \frac{13 - 5(2)}{3} = 1$$

$$y = \frac{14 - 4x}{6} \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	3.66
N	-1	3
O	0	2.33
P	1	1.66
Q	2	1

$$y = \frac{14 - 4(-2)}{6} = 3.66$$

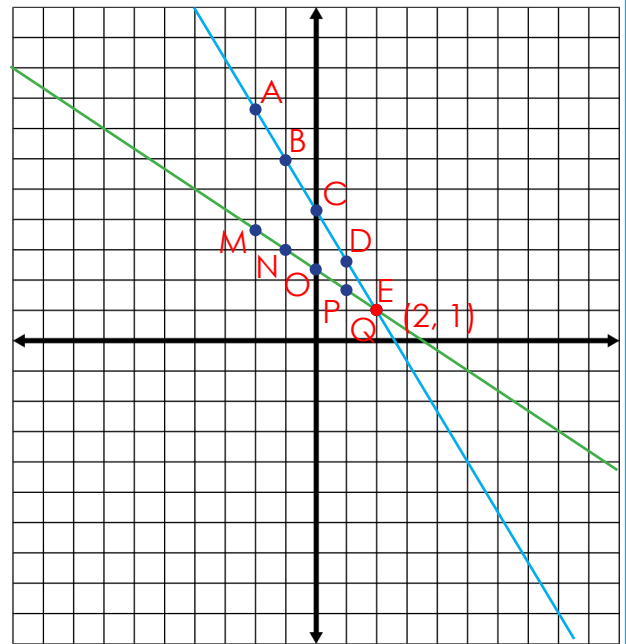
$$y = \frac{14 - 4(-1)}{6} = 3$$

$$y = \frac{14 - 4(0)}{6} = 2.33$$

$$y = \frac{14 - 4(1)}{6} = 1.66$$

$$y = \frac{14 - 4(2)}{6} = 1$$

$$R = (2, 1)$$



6) $2x + y = 10 \dots (1)$
 $8x + 2y = 20 \dots (2)$

$$y = 10 - 2x \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	14
B	-1	12
C	0	10
D	1	8
E	2	6

$$y = 10 - 2(-2) = 14$$

$$y = 10 - 2(-1) = 12$$

$$y = 10 - 2(0) = 10$$

$$y = 10 - 2(1) = 8$$

$$y = 10 - 2(2) = 6$$

$$y = 10 - 4x \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	18
N	-1	14
O	0	10
P	1	6
Q	2	2

$$y = 10 - 4(-2) = 18$$

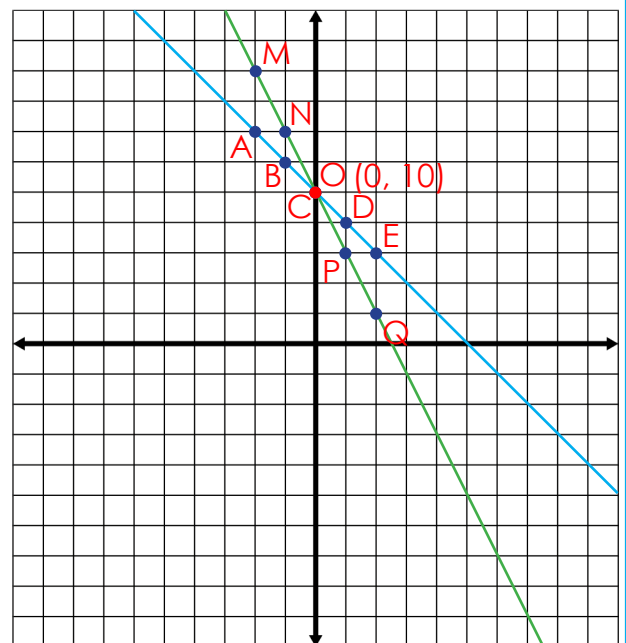
$$y = 10 - 4(-1) = 14$$

$$y = 10 - 4(0) = 10$$

$$y = 10 - 4(1) = 6$$

$$y = 10 - 4(2) = 2$$

$$R = (0, 10)$$



$$7) \begin{aligned} 5x - y &= 13 \dots (1) \\ 3x + y &= 11 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = -13 + 5x \dots (1)$$

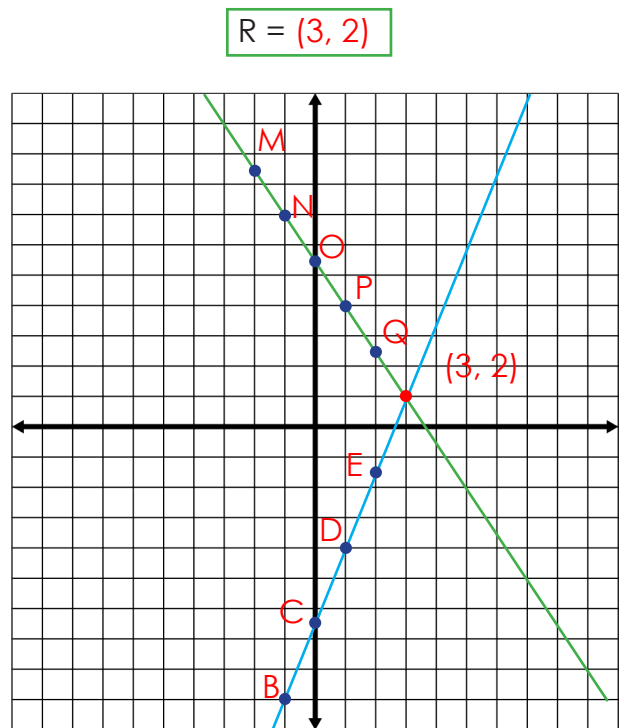
Puntos	x	y
A	-2	-23
B	-1	-18
C	0	-13
D	1	-8
E	2	-3

$$\begin{aligned} y &= -13 + 5(-2) = -23 \\ y &= -13 + 5(-1) = -18 \\ y &= -13 + 5(0) = -13 \\ y &= -13 + 5(1) = -8 \\ y &= -13 + 5(2) = -3 \end{aligned}$$

$$y = 11 - 3x \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	17
N	-1	14
O	0	11
P	1	8
Q	2	5

$$\begin{aligned} y &= 11 - 3(-2) = 17 \\ y &= 11 - 3(-1) = 14 \\ y &= 11 - 3(0) = 11 \\ y &= 11 - 3(1) = 8 \\ y &= 11 - 3(2) = 5 \end{aligned}$$



$$8) \begin{aligned} 3x + 7y &= 23 \dots (1) \\ 5x - 3y &= 9 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = \frac{23 - 3x}{7} \dots (1)$$

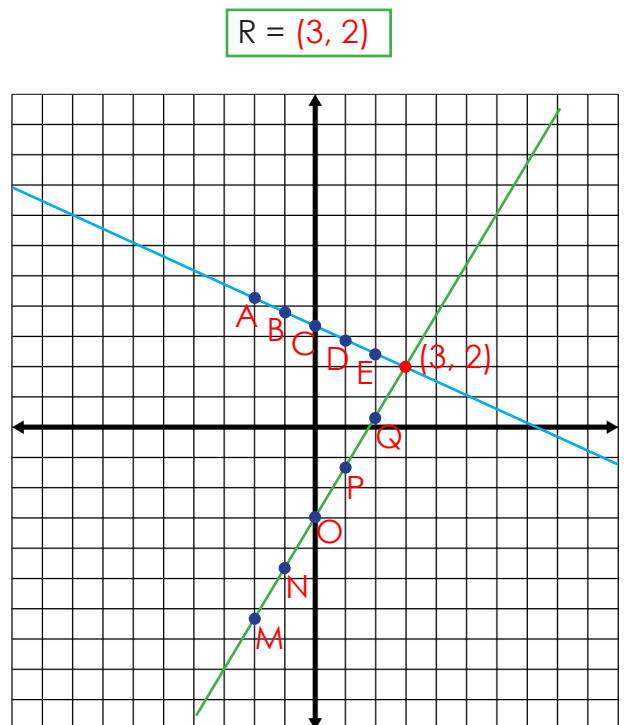
Puntos	x	y
A	-2	4.14
B	-1	3.71
C	0	3.28
D	1	2.85
E	2	2.42

$$\begin{aligned} y &= \frac{23 - 3(-2)}{7} = 4.14 \\ y &= \frac{23 - 3(-1)}{7} = 3.71 \\ y &= \frac{23 - 3(0)}{7} = 3.28 \\ y &= \frac{23 - 3(1)}{7} = 2.85 \\ y &= \frac{23 - 3(2)}{7} = 2.42 \end{aligned}$$

$$y = \frac{9 - 5x}{-3} \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	-6.33
N	-1	-4.66
O	0	-3
P	1	-1.33
Q	2	0.33

$$\begin{aligned} y &= \frac{9 - 5(-2)}{-3} = -6.33 \\ y &= \frac{9 - 5(-1)}{-3} = -4.66 \\ y &= \frac{9 - 5(0)}{-3} = -3 \\ y &= \frac{9 - 5(1)}{-3} = -1.33 \\ y &= \frac{9 - 5(2)}{-3} = 0.33 \end{aligned}$$



$$9) \begin{aligned} 6x - y &= 1 \dots (1) \\ 4x + y &= 9 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = -1 + 6x \dots (1)$$

Puntos	x	y
A	-2	-13
B	-1	-7
C	0	-1
D	1	5
E	2	11

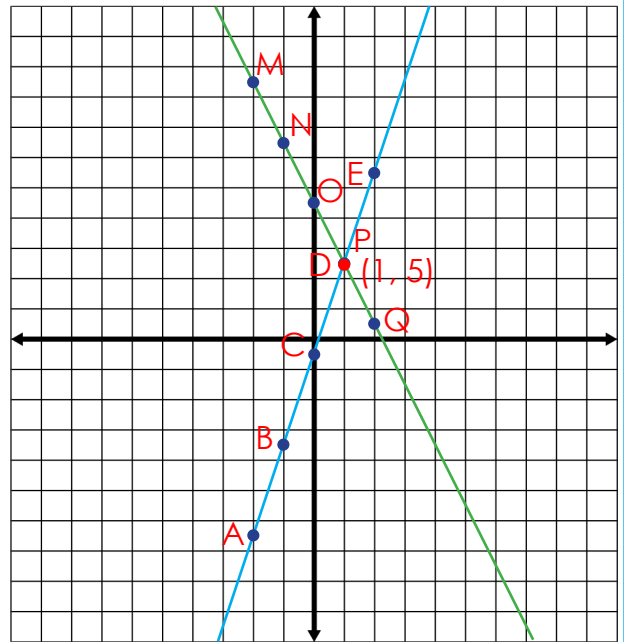
$$\begin{aligned} y &= -1 + 6(-2) = -13 \\ y &= -1 + 6(-1) = -7 \\ y &= -1 + 6(0) = -1 \\ y &= -1 + 6(1) = 5 \\ y &= -1 + 6(2) = 11 \end{aligned}$$

$$y = 9 - 4x \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	17
N	-1	13
O	0	9
P	1	5
Q	2	1

$$\begin{aligned} y &= 9 - 4(-2) = 17 \\ y &= 9 - 4(-1) = 13 \\ y &= 9 - 4(0) = 9 \\ y &= 9 - 4(1) = 5 \\ y &= 9 - 4(2) = 1 \end{aligned}$$

$$R = (1, 5)$$



$$10) \begin{aligned} 3x + 4y &= -7 \dots (1) \\ 2x - 4y &= 2 \dots (2) \end{aligned}$$

$$y = \frac{-7 - 3x}{4} \dots (2)$$

Puntos	x	y
A	-2	-0.25
B	-1	-1
C	0	-1.75
D	1	-2.5
E	2	-3.25

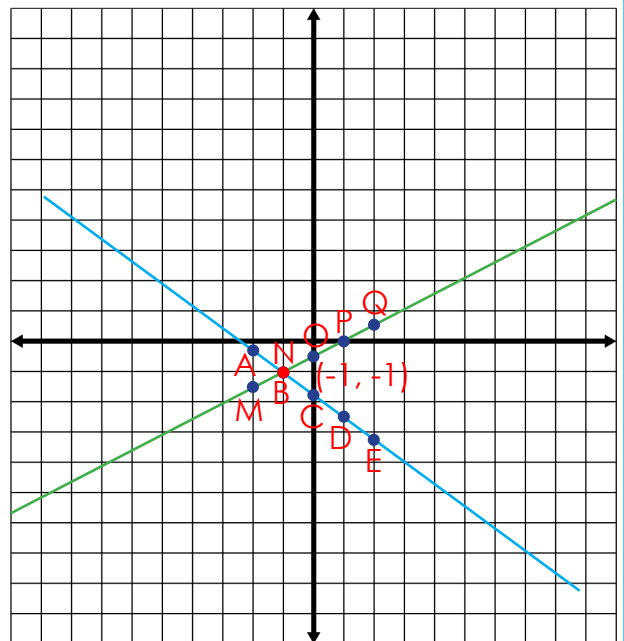
$$\begin{aligned} y &= \frac{-7 - 3(-2)}{4} = -0.25 \\ y &= \frac{-7 - 3(-1)}{4} = -1 \\ y &= \frac{-7 - 3(0)}{4} = -1.75 \\ y &= \frac{-7 - 3(1)}{4} = -2.5 \\ y &= \frac{-7 - 3(2)}{4} = -3.25 \end{aligned}$$

$$y = \frac{2 - 2x}{-4} \dots (2)$$

Puntos	x	y
M	-2	-1.5
N	-1	-1
O	0	-0.5
P	1	0
Q	2	0.5

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 - 2(-2)}{-4} = -1.5 \\ y &= \frac{2 - 2(-1)}{-4} = -1 \\ y &= \frac{2 - 2(0)}{-4} = -0.5 \\ y &= \frac{2 - 2(1)}{-4} = 0 \\ y &= \frac{2 - 2(2)}{-4} = 0.5 \end{aligned}$$

$$R = (-1, -1)$$



Resuelve los siguientes problemas de sistemas de ecuaciones lineales por el método que más se te facilite.

a) La diferencia de dos números es 19, y la quinta parte de su suma es 25. Hallar los números.

$$\begin{array}{llll}
 x - y = 19 \dots (1) & \text{Desp "x" en (1) y (2)} & \text{Igualar (3) y (4) y resolver ecuación} & \text{Sust "y" en (4)} \\
 \frac{x+y}{5} = 25 \dots (2) & (1) \quad x = 19 + y \dots (3) & 19 + y = 125 - y & x = 125 - 53 \\
 & (2) \quad x = 125 - y \dots (4) & y + y = 125 - 19 & \boxed{x = 72} \\
 & & 2y = 106 & \\
 & & y = \frac{106}{2} = 53 &
 \end{array}$$

b) En el circo, 12 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$ 192.00; y 8 entradas de adulto y 6 de niño cuestan \$ 132. Encuentra el precio de una entrada de adulto y una de niño.

$$\begin{array}{ll}
 6(12a + 8n = 192) \dots (1) & \text{Sust "a" en (2)} \\
 -8(8a + 6n = 132) \dots (2) & 8(12) + 6n = 132 \\
 \downarrow & 96 + 6n = 132 \\
 72a + 48n = 1152 & 6n = 132 - 96 \\
 -64a - 48n = -1056 & 6n = 36 \\
 \hline & n = \frac{36}{6} = 6 \\
 8a = 96 & \\
 a = \frac{96}{8} = 12 &
 \end{array}$$

c) Si la base de un rectángulo disminuye 2 cm y la altura aumenta 2 cm, su área aumentaría 4 cm cuadrados; si la base aumenta 4 cm y la altura disminuye 2 cm, el área permanece constante. ¿Cuál es el área del rectángulo original?

$$\begin{array}{llll}
 (x - 2)(y + 2) = xy + 4 \dots (1) & -2(2x - 2y = 8) \dots (3) & \text{Sust "y" en (4)} & \\
 (x + 4)(y - 2) = xy \dots (2) & -2(-2x + 4y = 8) \dots (4) & -2x + 4(8) = 8 & \\
 \text{desarrollar (1) y (2)} & \downarrow & -2x + 32 = 8 & \\
 xy + 2x - 2y - 4 = xy + 4 & -4x + 4y = -16 & -2x = 8 - 32 & \boxed{8 \times 12 = 96} \\
 2x - 2y = 4 + 4 & 4x - 8y = -16 & -2x = -24 & \boxed{R = 96 \text{ cm}} \\
 2x - 2y = 8 \dots (3) & -4y = -32 & x = \frac{-24}{-2} = 12 & \\
 xy - 2x + 4y - 8 = xy & y = \frac{-32}{-4} = 8 & &
 \end{array}$$

d) Se tienen \$ 195 en monedas de 5 pesos y de 10 pesos. Si en total hay 27 monedas, ¿Cuántas son de 5 pesos y cuántas de 10 pesos?

$$\begin{array}{ll}
 1(5x + 10y = 195) \dots (1) & \text{Sust "y" en (2)} \\
 -5(x + y = 27) \dots (2) & x + 12 = 27 \\
 \downarrow & x = 27 - 12 \\
 5x + 10y = 195 & \boxed{x = 15} \\
 -5x - 5y = -135 & \\
 \hline & + 5y = 60 \\
 y = \frac{60}{5} = 12 &
 \end{array}$$



e) El costo de cinco discos compactos de música de igual precio menos \$ 120 es igual al costo de tres discos compactos más \$ 128. ¿Cuánto cuesta cada disco compacto?

$$\begin{aligned}
 5x - 120 &= 3x + 128 \\
 5x - 3x &= 128 + 120 && 124 \text{ pesos por disco} \\
 2x &= 248 \\
 x &= \frac{248}{2} = 124
 \end{aligned}$$

f) Ceci compró 3 paletas y 2 dulces por \$ 11.00; Héctor 2 paletas y 5 dulces por \$ 11.00, ¿Cuánto cuesta cada paleta y cada dulce?

$$\begin{aligned}
 2(3p + 2d = 11) \dots (1) &&& \text{Sust "d" en (2)} \\
 -3(2p + 5d = 11) \dots (2) &&& 2p + 5(1) = 11 \\
 &&& 2p + 5 = 11 \\
 &&& 2p = 11 - 5 \\
 &&& 2p = 6 \\
 &&& p = \frac{6}{2} = 3 \\
 \downarrow &&& \\
 6p + 4d = 22 &&& \\
 -6p - 15d = -33 &&& \\
 \hline
 -11d = -11 &&& \\
 d = \frac{-11}{-11} = 1 &&&
 \end{aligned}$$

g) El cuádruplo de un número es 8 unidades menor que el doble de otro, mientras que el séptuplo del primero es igual al triple del segundo. ¿Cuáles son dichos números?

$$\begin{aligned}
 3(4x - 2y = -8) \dots (1) &&& \text{Sust "x" en (2)} \\
 -2(7x - 3y = 0) \dots (2) &&& 7(12) + 3y = 0 \\
 &&& 84 + 3y = 0 \\
 &&& 3y = -84 \\
 &&& y = \frac{-84}{3} = -28 \\
 \downarrow &&& \\
 12x - 6y = -24 &&& \\
 -14x + 6y = 0 &&& \\
 \hline
 -2x = -24 &&& \\
 x = \frac{-24}{-2} = 12 &&&
 \end{aligned}$$

h) Si 8 kg de naranja y 5 kg de papa cuestan \$ 28.75, y 6 kg de naranja y 2 kg de papa cuestan \$ 18.50, ¿Cuál es el precio por kilogramo de cada producto?

$$\begin{aligned}
 2(8n + 5p = 28.75) \dots (1) &&& \text{Sust "n" en (2)} \\
 -5(6n + 2p = 18.50) \dots (2) &&& 6(2.5) + 2p = 18.50 \\
 &&& 15 + 2p = 18.50 \\
 &&& 2p = 18.50 - 15 \\
 &&& 2p = -3.5 \\
 &&& p = \frac{-3.5}{2} = -1.75 \\
 \downarrow &&& \\
 16n + 10p = 57.5 &&& \\
 -30n - 10p = -92.5 &&& \\
 \hline
 -14n = -35 &&& \\
 n = \frac{-35}{-14} = 2.5 &&&
 \end{aligned}$$



i) Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Cuáles números son?

$$\begin{array}{rcl} x + y = 241 \dots (1) & \text{Sust "x" en (2)} & \\ x - y = 99 \dots (2) & 170 - y = 99 & \\ \hline 2x = 340 & -y = 99 - 170 & \\ x = \frac{340}{2} = 170 & -(-y = -71) & \\ & y = 71 & \end{array}$$

j) Dos números suman 400 y el mayor es igual a 4 veces el menor, ¿qué números son?

$$\begin{array}{rcl} 4(x + y = 400) \dots (1) & \text{Sust "x" en (2)} & \\ x - 4y = 0 \dots (2) & 320 - 4y = 0 & \\ \downarrow & -4y = -320 & \\ 4x + 4y = 1600 & y = \frac{-320}{-4} = 80 & \\ x - 4y = 0 & & \\ \hline 5x = 1600 & & \\ x = \frac{1600}{5} = 320 & & \end{array}$$

k) Pedro tiene \$ 1 650 en billetes de 50 y de 100; si en total tiene 25 billetes, ¿cuántos billetes tiene de cada denominación?

$$\begin{array}{rcl} 50x + 100y = 1650 \dots (1) & \text{Sust "y" en (2)} & \\ -50(x + y = 25) \dots (2) & x + 8 = 25 & \\ \downarrow & x = 25 - 8 & \\ 50x + 100y = 1650 & x = 17 & \\ -50x - 50y = -1250 & & \\ \hline + 50y = 400 & & \\ y = \frac{400}{50} = 8 & & \end{array}$$

l) En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?

$$\begin{array}{rcl} -2(x + y = 67) \dots (1) & \text{Sust "x" en (2)} & \\ x + 2y = 92 \dots (2) & 42 + 2y = 92 & \\ \downarrow & 2y = 92 - 42 & \\ -2x - 2y = -134 & 2y = 50 & \\ x + 2y = 92 & y = \frac{50}{2} = 25 & \\ \hline -x = -42 & & \\ -(-x = -42) & & \\ x = 42 & & \end{array}$$



m) En un almacén hay dos tipos de lámparas, las de tipo A que utilizan 2 bombillas y las de tipo B que utilizan 7 bombillas. Si en total en el almacén hay 25 lámparas y 160 bombillas, ¿cuántas lámparas hay de cada tipo?

$$-2(A + B = 25) \dots (1)$$

$$2A + 7B = 160 \dots (2)$$



$$-2A - 2B = -50$$

$$2A + 7B = 160$$

$$+ 5B = 110$$

$$B = \frac{110}{5} = 22$$

Sust "B" en (2)

$$2A + 7(22) = 160$$

$$2A + 154 = 160$$

$$2A = 160 - 154$$

$$2A = 6$$

$$A = \frac{6}{2} = 3$$

n) En un corral hay ovejas y gallinas en número de 77 y si contamos las patas obtenemos 274 en total. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay?

$$-2(o + g = 77) \dots (1)$$

$$4o + 2g = 274 \dots (2)$$



$$-2o - 2g = -154$$

$$4o + 2g = 274$$

$$= 120$$

$$o = \frac{120}{2} = 60$$

Sust "o" en (2)

$$4(60) + 2g = 274$$

$$240 + 2g = 274$$

$$2g = 274 - 240$$

$$2g = 34$$

$$g = \frac{34}{2} = 17$$

o) Por dos camisas y dos pantalones pagué \$ 430. Mi amigo pagó \$ 350 por dos camisas y un pantalón. ¿Cuánto cuestan la camisa y el pantalón?

$$2c + 2p = 430 \dots (1)$$

$$-2(2c + p = 350) \dots (2)$$



$$2c + 2p = 430$$

$$-4c - 2p = -700$$

$$-2c = -270$$

$$c = \frac{-270}{-2} = 135$$

Sust "c" en (2)

$$2(135) + p = 350$$

$$270 + p = 350$$

$$p = 350 - 270$$

$$p = 80$$

p) Mónica compró 3 paletas y 2 refrescos por \$ 16.00; Carlos compró 2 paletas y 5 refrescos por \$ 29.00, ¿Cuánto cuesta cada paleta y cada refresco?

$$2(3p + 2r = 16) \dots (1)$$

$$-3(2p + 5r = 29) \dots (2)$$



$$6p + 4r = 32$$

$$-6p - 15r = -87$$

$$-11r = -55$$

$$r = \frac{-55}{-11} = 5$$

Sust "r" en (2)

$$2p + 5(5) = 29$$

$$2p + 25 = 29$$

$$2p = 29 - 25$$

$$2p = 4$$

$$p = \frac{4}{2} = 2$$



q) Cinco trajes y 3 sombreros cuestan, \$ 41 800 y, 8 trajes y 9 sombreros \$ 69 400 ¿Cuál es el precio de un traje y de un sombrero?

$$\begin{array}{rcl}
 9(5t + 3s = 41800) \dots (1) & \text{Sust "t" en (2)} & \\
 -3(8t + 9s = 69400) \dots (2) & 8(8000) + 9s = 69400 & \\
 \downarrow & 64000 + 9s = 69400 & \\
 45t + 27s = 376200 & 9s = 69400 - 64000 & \\
 -24t - 27s = -208200 & 9s = 5400 & \\
 \hline
 21t = 168000 & s = \frac{5400}{9} = 600 & \\
 t = \frac{168000}{21} = 8000 & &
 \end{array}$$

r) Un hacendado compró 4 vacas y 7 caballos por \$ 514 000. Si más tarde a los mismos precios compró 8 vacas y 9 caballos por \$ 818 000, ¿Cuál es el costo cada vaca y cada caballo?

$$\begin{array}{rcl}
 8(4v + 7c = 514000) \dots (1) & \text{Sust "c" en (2)} & \\
 -4(8v + 9c = 818000) \dots (2) & 8v + 9(42000) = 818000 & \\
 \downarrow & 8v + 378000 = 818000 & \\
 32v + 56c = 4112000 & 8v = 818000 - 378000 & \\
 -32v - 36c = -3272000 & 8v = 440000 & \\
 \hline
 20c = 840000 & v = \frac{440000}{8} = 55000 & \\
 c = \frac{840000}{20} = 42000 & &
 \end{array}$$

s) En una mañanita 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan \$ 512. Si por 17 entradas de niño y 15 de adulto se pagó \$ 831, halla el precio de una entrada de niño y una de adulto.

$$\begin{array}{rcl}
 15(10a + 9n = 512) \dots (1) & \text{Sust "n" en (2)} & \\
 -10(15a + 17n = 831) \dots (2) & 15a + 17(18) = 831 & \\
 \downarrow & 15a + 306 = 831 & \\
 150a + 135n = 7680 & 15a = 831 - 306 & \\
 -150a - 170n = -8310 & 15a = 525 & \\
 \hline
 -35n = -630 & a = \frac{525}{15} = 35 & \\
 n = \frac{-630}{-35} = 18 & &
 \end{array}$$

t) Encuentra dos números positivos cuya suma es 225 y su diferencia es 135.

$$\begin{array}{rcl}
 x + y = 225 \dots (1) & \text{Sust "x" en (2)} & \\
 x - y = 135 \dots (2) & 180 - y = 135 & \\
 \hline
 2x = 360 & -y = 135 - 180 & \\
 x = \frac{360}{2} = 180 & -(-y = -45) & \\
 & y = 45 &
 \end{array}$$



u) Un granjero tiene cierta cantidad de animales, entre gallinas y borregos, de tal manera que al sumar el número de cabezas el resultado es 44 y la suma de las patas es 126. ¿Cuántas gallinas y cuántos borregos tiene?

$$\begin{aligned} 2(g + b) &= 44 \dots (1) \\ -(2g + 4b) &= 126 \dots (2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2g + 2b &= 88 \\ -2g - 4b &= -126 \\ \hline -2b &= -38 \\ b &= \frac{-38}{-2} = 19 \end{aligned}$$

Sust "n" en (2)

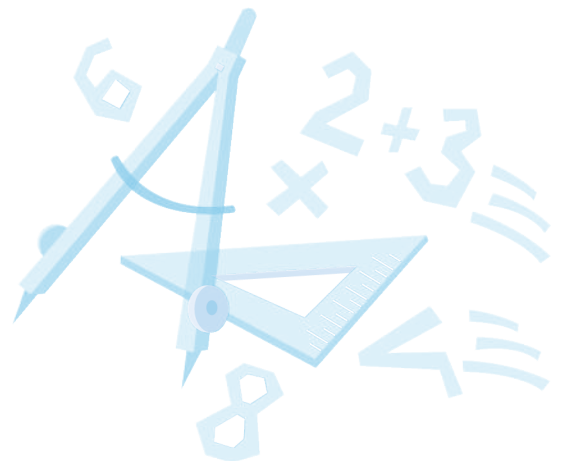
$$\begin{aligned} 2g + 4(19) &= 126 \\ 2g + 76 &= 126 \\ 2g &= 126 - 76 \\ 2g &= 50 \\ g &= \frac{50}{2} = 25 \end{aligned}$$

v) ¿Cuáles serán dos números que sumados dan 104 y restados dan 8?

$$\begin{aligned} x + y &= 104 \dots (1) \\ x - y &= 8 \dots (2) \\ \hline 2x &= 112 \\ x &= \frac{112}{2} = 56 \end{aligned}$$

Sust "x" en (2)

$$\begin{aligned} 56 - y &= 8 \\ -y &= 8 - 56 \\ -(-y) &= -48 \\ y &= 48 \end{aligned}$$



ÁNGULOS ENTRE PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

De la intersección de dos paralelas y una secante se forman 8 ángulos cuatro internos y cuatro externos, por la posición que guardan las paralelas respecto a la secante se establecen diversas relaciones de igualdad entre ellos, así podemos encontrar:

Ángulos opuestos por el vértice: Ángulos formados por la prolongación de las mismas rectas, por lo que son iguales, pero se encuentran a ambos lados del vértice.

Ángulos suplementarios: Son los ángulos que al sumarlos dan 180° y pueden encontrarse juntos o separados.

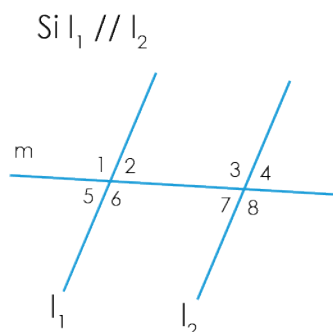
Ángulos adyacentes: Son los ángulos que comparten el mismo vértice y uno de sus lados.

Ángulos correspondientes: Son ángulos iguales localizados en el mismo lado de la secante, en diferentes paralelas, uno es interno y otro externo.

Ángulos alternos: Pueden ser internos o externos, son iguales y se localizan en la parte interna o externa de las paralelas uno de un lado y otro lado de la secante.

Ángulos colaterales: Pueden ser internos o externos son suplementarios y se encuentran en el mismo lado de la secante.

Algunos de los ángulos que se han mencionado anteriormente los podemos distinguir a continuación.



- a) cuatro ángulos internos 2, 3, 6 y 7
- b) cuatro ángulos externos 1, 5, 4, 8
- c) por su posición $\angle 1$ es opuesto por el vértice de $\angle 6$
- d) por su posición $\angle 1$ es correspondiente de $\angle 3$
- e) $\angle 5$ es alterno externo de $\angle 4$
- f) $\angle 6$ es colateral interno de $\angle 7$
- g) $\angle 2$ es alterno interno de $\angle 7$

Ángulos correspondientes

$$\begin{aligned}\angle 1 &= \angle 3 \\ \angle 2 &= \angle 4 \\ \angle 5 &= \angle 7 \\ \angle 6 &= \angle 8\end{aligned}$$

Ángulos alternos internos

$$\begin{aligned}\angle 2 &= \angle 7 \\ \angle 6 &= \angle 3\end{aligned}$$

Ángulos alternos externos

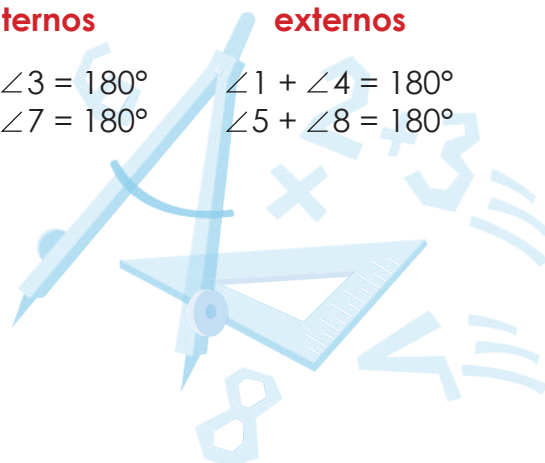
$$\begin{aligned}\angle 1 &= \angle 8 \\ \angle 5 &= \angle 4\end{aligned}$$

Ángulos colaterales internos

$$\begin{aligned}\angle 2 + \angle 3 &= 180^\circ \\ \angle 6 + \angle 7 &= 180^\circ\end{aligned}$$

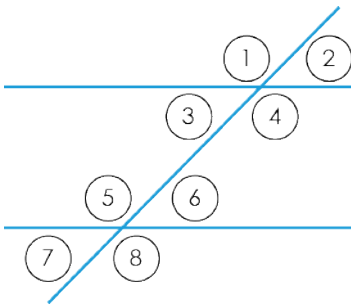
Ángulos colaterales externos

$$\begin{aligned}\angle 1 + \angle 4 &= 180^\circ \\ \angle 5 + \angle 8 &= 180^\circ\end{aligned}$$



Ejercicio:

Observa la figura siguiente y después, contesta a las preguntas siguientes:



1. ¿Cómo se llaman son los ángulos 1 y 2? Ángulos suplementarios

2. ¿Cómo podemos llamar a los ángulos 1 y 4? Ángulos opuestos por el vértice

3. ¿Son suplementarios los ángulos 2 y 4? Si

4. ¿Son iguales los ángulos 2 y 3? ¿Por qué? Si, por que son ángulos opuestos por el vértice

5. ¿Son correspondientes los ángulos 3 y 7? Si

6. ¿Cómo son los ángulos 4 y 6? Ángulos suplementarios

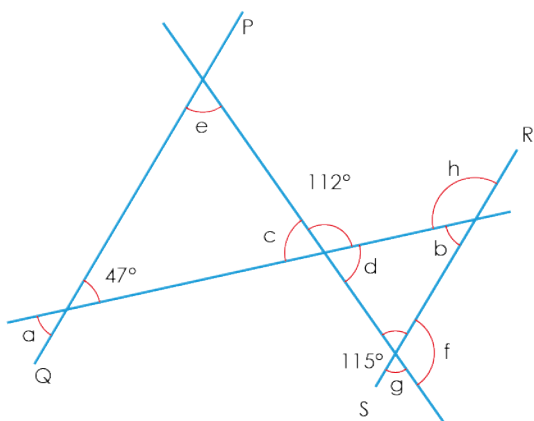
7. ¿El ángulo 6 es correspondiente al ángulo 3? No

8. ¿Son iguales los ángulos 5 y 8? ¿Por qué? Si, por que son ángulos opuestos por el vértice

9. ¿Cómo puedes llamarles a los ángulos 1 y 8? Si, por que son ángulos opuestos por el vértice

10. ¿Son alternos internos los ángulos 5 y 6? No

Considera que las rectas \overline{PQ} y \overline{RS} son paralelas, calcula y anota las medidas de ángulos que hacen falta.



$$\angle a = \underline{47^\circ}$$

$$\angle b = \underline{47^\circ}$$

$$\angle c = \underline{68^\circ}$$

$$\angle d = \underline{68^\circ}$$

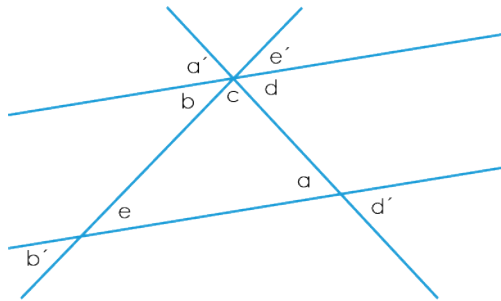
$$\angle e = \underline{65^\circ}$$

$$\angle f = \underline{115^\circ}$$

$$\angle g = \underline{65^\circ}$$

$$\angle h = \underline{133^\circ}$$

¿Cuánto miden los ángulos internos **a**, **c** y **e** del triángulo que aparece en la siguiente ilustración, si el ángulo **b'** mide 45° y el ángulo **d'** mide 60° ?



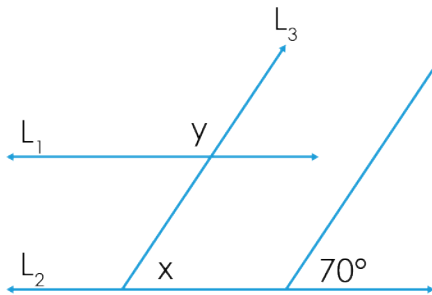
$$\angle a = \underline{60^\circ}$$

$$\angle c = \underline{75^\circ}$$

$$\angle e = \underline{45^\circ}$$

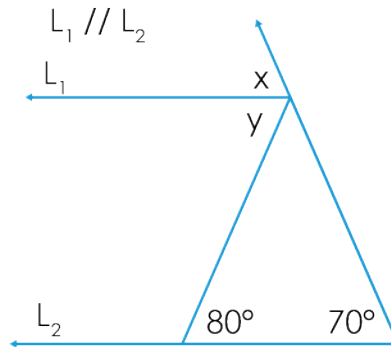
En cada una de las siguientes figuras obtén la medida de los ángulos “**x**” y “**y**” según corresponda.

$$L_1 // L_2 ; L_3 // L_4$$



$$x = \underline{70^\circ}$$

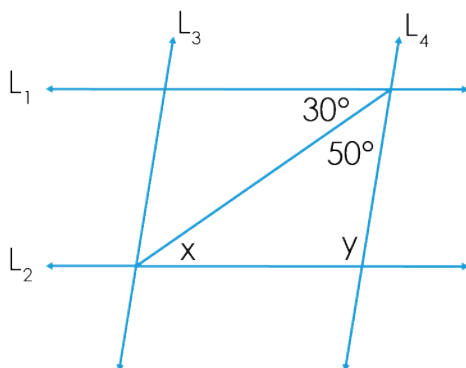
$$y = \underline{110^\circ}$$



$$x = \underline{70^\circ}$$

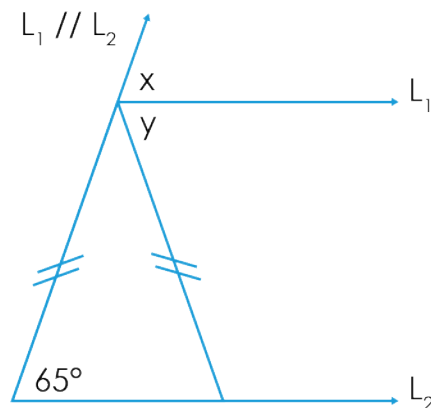
$$y = \underline{80^\circ}$$

$$L_1 // L_2 ; L_3 // L_4$$



$$x = \underline{30^\circ}$$

$$y = \underline{100^\circ}$$



$$x = \underline{65^\circ}$$

$$y = \underline{65^\circ}$$



SUCESIONES NUMÉRICAS

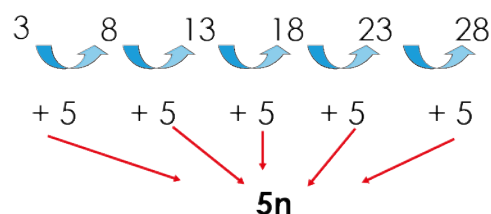
El conjunto de varios números ordenados con base en una determinada regla constituye una sucesión numérica.

Por ejemplo: múltiplos de 3 menores de 30 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

Para descubrir la generalización, fórmula o patrón de una sucesión se tienen que calcular las diferencias que hay entre las cantidades, este se escribirá como el factor constante de la expresión:

Por ejemplo: 3, 8, 13, 18, 23, 28, __, __

- a) El incremento de posición a posición en este caso es 5 como se observa.
- b) Se integra el incremento como factor con "n" recuerda que "n" es la posición.



Posteriormente se multiplica el factor encontrado por uno que es la primera posición y se revisa si falta o sobra para obtener el primer número de la sucesión.

- c) Posición uno. Si "n" es 1 entonces $5(1) = 5$
- d) Como en la primera posición hay 3 sobran 2. Entonces el patrón será **$5n - 2$**
- e) Si se va a calcular otra posición que no esté en la secuencia se sustituye en el patrón dicho valor. Si el número que ocupa la posición "n" es 25 entonces:

$$5(25) - 2 = 125 - 2 = 123$$

 El número que ocupa la posición 25 en la sucesión es **123**

Ejercicio:

Encuentra la generalización de cada una de las siguientes sucesiones.

Sucesión

- 1) - 6, - 9, - 12, - 15, - 18, ...
- 2) 4, 2, 0, - 2, - 4, - 6, ...
- 3) 36, 31, 26, 21, 16, 11, ...
- 4) - 7, - 1, 5, 11, 17, 23, 29, ...
- 5) - 13, - 19, - 25, - 31, - 37, - 43, - 49, ...
- 6) - 3.5, - 7.5, - 11.5, - 15.5, - 19.5, - 23.5, - 27.5, ...

Generalización

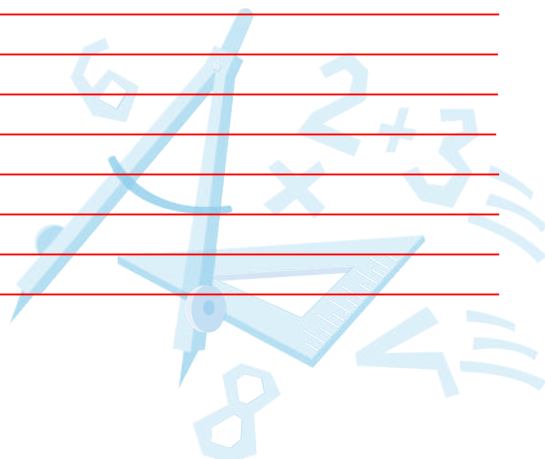
- | | | |
|-------|-----------|-------|
| _____ | -3n - 3 | _____ |
| _____ | -2n + 6 | _____ |
| _____ | -5n + 41 | _____ |
| _____ | 6n - 13 | _____ |
| _____ | -6n - 7 | _____ |
| _____ | -4n + 0.5 | _____ |

- 7) $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$
- 8) $20, 18, 16, 14, 12, 10, \dots$
- 9) $-5, -8, -11, -14, -17, -20, \dots$
- 10) $-24, -18, -12, -6, 0, 6, \dots$
- 11) $-30, -25, -20, -15, -10, -5, \dots$
- 12) $-7, -5, -3, -1, 1, 3, \dots$
- 13) $15, 9, 3, -3, -9, -15, \dots$
- 14) $-10, -11, -12, -13, -14, -15, \dots$
- 15) $-2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots$
- 16) $-130, -133, -136, -139, -142, -145, -148, \dots$
- 17) $-4.3, -8.3, -12.3, -16.3, -20.3, -24.3, -28.3, \dots$
- 18) $-39, -32, -25, -18, -11, -4, \dots$
- 19) $-33, -23, -13, -3, 7, 17, \dots$
- 20) $21, 28, 35, 42, 49, 56, \dots$
- 21) $30, 25, 20, 15, 10, 5, \dots$
- 22) $-12, -4, 4, 12, 20, 28, 36, \dots$
- 23) $-76, -81, -86, -91, -96, -101, -106, \dots$
- 24) $-1.12, -3.12, -5.12, -7.12, -9.12, -11.12, -13.12, \dots$
- 25) $-65, -67, -69, -71, -73, -75, \dots$
- 26) $-40, -80, -120, -160, -200, -240, \dots$
- 27) $14, 10, 6, 2, -2, -6, \dots$
- 28) $91, 61, 31, 1, -29, -59, \dots$
- 29) $-77, -66, -55, -44, -33, -22, -11, \dots$
- 30) $-7, -5, -3, -1, 1, 3, \dots$
- 31) $28, 23, 18, 13, 8, 3, \dots$
- 32) $-24, -18, -12, -6, 0, 6, \dots$
- 33) $-9, -15, -21, -27, -33, \dots$
- 34) $-5, -8, -11, -14, -17, -20, \dots$
- 35) $-3, -7, -11, -15, -19, \dots$
- 36) $5, 3, 1, -1, -3, -5, \dots$

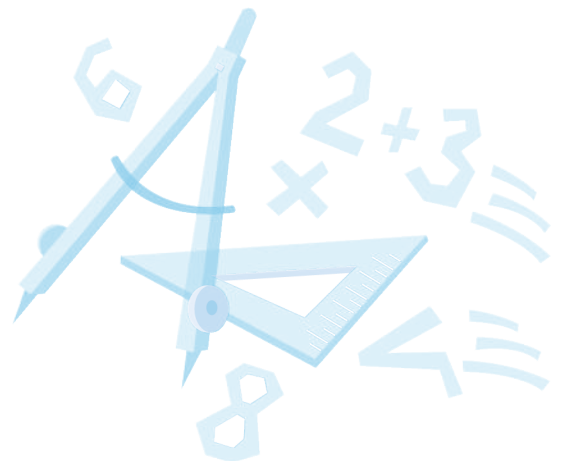
- $-n$
- $-2n + 22$
- $-3n - 2$
- $6n - 30$
- $5n - 35$
- $2n - 9$
- $-6n + 21$
- $-n - 9$
- $5n - 7$
- $-3n - 127$
- $-4n - 0.3$
- $7n - 46$
- $10n - 43$
- $7n + 14$
- $-5n + 35$
- $8n - 20$
- $-5n - 71$
- $-2n + 0.88$
- $-2n - 63$
- $-40n$
- $-4n + 18$
- $-30n + 121$
- $11n - 88$
- $2n - 9$
- $-5n + 33$
- $6n - 30$
- $-6n - 3$
- $-3n - 2$
- $-4n + 1$
- $-2n + 7$

Encuentra los 8 primeros términos de la sucesión de cada una de las siguientes generalizaciones:

- 1) $4n - 7$ $-3, 1, 5, 9, 17, 21, 25$
- 2) $n - 13$ $-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5$
- 3) $2n - 2$ $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$
- 4) $-3n + 15$ $12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9$
- 5) $2n - 7$ $-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$
- 6) $-5n + 1$ $-4, -9, -14, -19, -24, 29, -34, -39$
- 7) $3n - 6$ $-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$
- 8) $12n - 4$ $8, 20, 32, 44, 56, 68, 80, 92$
- 9) $2n - 3$ $-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$
- 10) $n - 5$ $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$



11) $2n - 11$	<u>-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5</u>
12) $-10n + 1$	<u>-9, -19, -9, -39, -49, -59, -69, -79</u>
13) $-4n + 9$	<u>5, 1, -3, -7, -11, -15, -19, -23</u>
14) $n + 16$	<u>17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24</u>
15) $6n - 12$	<u>-6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36</u>
16) $4n + 4$	<u>8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36</u>
17) $-3n + 6$	<u>3, 0, -3, -6, -9, -12, -15, -18</u>
18) $-4n - 4$	<u>-8, -12, -16, -20, -24, -28, -32</u>
19) $8n - 9$	<u>-1, 7, 15, 23, 31, 39, 47, 55</u>
20) $-3n - 1$	<u>-4, -7, -10, -13, -16, -19, -22</u>
21) $-8n + 15$	<u>7, -1, -9, -17, -25, -33, -41</u>
22) $4n - 6$	<u>-2, 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26</u>
23) $-7n - 3$	<u>-10, -17, -24, -31, -35, -45, -52, -59</u>
24) $-13n - 2$	<u>-15, -28, -41, -54, -67, -80, -93, -106</u>
25) $5n + 7$	<u>12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47</u>
26) $2n - 10$	<u>-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8</u>
27) $-n - 2$	<u>-3, -5, -7, -9, -11, -13, -15, -17</u>
28) $3n + 2$	<u>5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29</u>
29) $n - 7$	<u>-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1</u>
30) $2n + 4$	<u>6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20</u>
31) $-4n - 1$	<u>-5, -9, -13, -17, -21, -25, -29, -33</u>
32) $2n - 30$	<u>-28, -26, -24, -22, -20, -18, -16, -14</u>
33) $-2n$	<u>-2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -16</u>
34) $n - 10$	<u>-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2</u>
35) $-5n - 3$	<u>-8, -13, -18, -23, -28, -33, -38, -43</u>
36) $4n - 90$	<u>-86, -82, -78, -74, -70, -66, -62, -58</u>



PORCENTAJES

Porcentaje es el tanto por ciento.

Un porcentaje es una forma de expresar una proporción como una fracción de denominador 100, en otras palabras, es el número de unidades que se toman de cada cien. Es decir, una expresión como "45%" (**45 por ciento**) es lo mismo que la fracción $\frac{45}{100}$.

Ejemplo:

$$8\% = \frac{8}{100} = 0.08$$

$$35\% = \frac{35}{100} = 0.35$$

$$15.8\% = \frac{35}{100} = 0.158$$

Cálculo de porcentajes

Existen dos formas para hallar un porcentaje o tanto por ciento.

1º Para calcular el porcentaje de una cantidad, multiplicamos la cantidad por el número que indica el porcentaje y dividimos el resultado entre 100.

Ejemplo:

El 20% de los estudiantes de un colegio, que tiene 240 alumnos, practica deporte. ¿Cuántos estudiantes practican deporte?

Para hallar la respuesta multiplicamos 240 por 20 y dividimos el resultado entre 100:

$$240 \times 20 = 4800 \quad \frac{4800}{100} = 48$$

Por tanto, el 20% de 240 alumnos = 48 alumnos.

2º Para calcular el porcentaje de una cantidad, multiplicamos la cantidad por la expresión decimal de dicho porcentaje.

Ejemplo:

Observa esta igualdad:

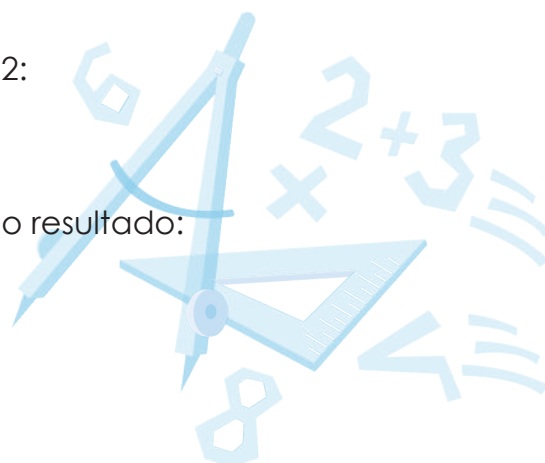
$$20\% = \frac{20}{100} = 0.20$$

Para calcular el 20% de 240, basta con multiplicar 240 por 0.2:

$$240 (0.2) = 48$$

Como se observa por esta otra manera también da el mismo resultado:

El 20% de 240 alumnos = 48 alumnos.



Ejercicio:

1) Ricardo compró un refrigerador por \$ 4 800 y una lavadora por \$ 6 200. Si por pagar en efectivo le descuentan el 15 %, ¿cuánto pagará por cada artículo?

$$\begin{array}{lcl}
 \$ 4800 \text{ x refri} & 4800 \longleftrightarrow 100\% & \\
 \$ 6200 \text{ x lavadora} & x \longleftrightarrow 85\% & x = \frac{85(4800)}{100} = \frac{408000}{100} = \underline{\$4080 \text{ pago por refri}} \\
 & & \\
 & 6200 \longleftrightarrow 100\% & \\
 & y \longleftrightarrow 85\% & y = \frac{85(6200)}{100} = \frac{527000}{100} = \underline{\$5270 \text{ pago por lavadora}}
 \end{array}$$

2) Si Elena gana \$ 12 500.00 mensuales y recibe un aumento del 8 % ¿cuál será su nuevo salario?

$$\begin{array}{lcl}
 12500 \longleftrightarrow 100\% & & \\
 x \longleftrightarrow 108\% & x = \frac{108(12500)}{100} = \frac{1350000}{100} = \underline{\$13500 \text{ es su nuevo salario}}
 \end{array}$$

3) Calcular el 27 % de 450.

$$\frac{27}{100} = 0.27(450) = \underline{121.5}$$

4) Calcular el 85 % de 2 360.

$$\frac{85}{100} = 0.85(2360) = \underline{2006}$$

5) ¿Qué porcentaje representa 15 de un total de 120?

$$\frac{15}{120} = 0.125 = \underline{12.5\%}$$

6) ¿Qué porcentaje representa 3 120 de un total de 8 000?

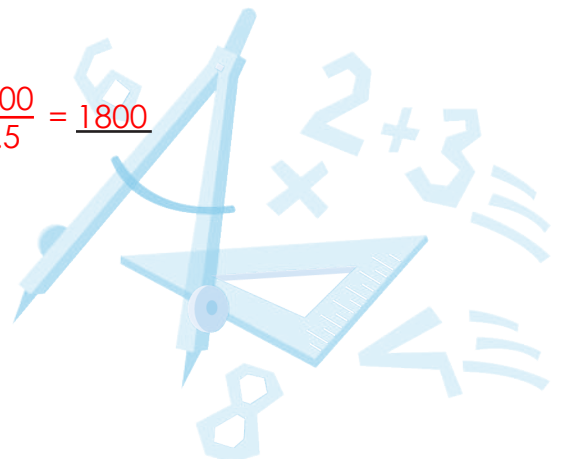
$$\frac{3120}{8000} = 0.39 = \underline{39\%}$$

7) El 64 % de una cantidad es 112. Calcular dicha cantidad.

$$\begin{array}{lcl}
 x \longleftrightarrow 100\% & & \\
 112 \longleftrightarrow 64\% & x = \frac{112(100)}{64} = \frac{11200}{64} = \underline{175}
 \end{array}$$

8) El 3.5 % de una cantidad es 63. Calcular dicha cantidad.

$$\begin{array}{lcl}
 x \longleftrightarrow 100\% & & \\
 63 \longleftrightarrow 3.5\% & x = \frac{63(100)}{3.5} = \frac{6300}{3.5} = \underline{1800}
 \end{array}$$



9) En las vacaciones navideñas un hotel ha tenido una ocupación de un 96 %. Si el hotel tiene 175 habitaciones, ¿cuántas se han ocupado?

$$\begin{array}{lcl} 175 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 96\% \end{array} \quad x = \frac{175(96)}{100} = \frac{16800}{100} = \underline{168}$$

10) En mi clase hay 30 alumnos. De ellos, hay 18 que vienen al instituto desde otra localidad utilizando el transporte. ¿Qué porcentaje del total de alumnos utilizan transporte?

$$\begin{array}{lcl} 30 & \longleftrightarrow & 100\% \\ 18 & \longleftrightarrow & ? \end{array} \quad x = \frac{100(18)}{30} = \frac{1800}{30} = \underline{60\%}$$

11) El 4.2 % de los habitantes de mi pueblo son jóvenes entre 14 y 18 años. Si hay 756 personas en este intervalo de edad, ¿cuántos habitantes habrá?

$$\begin{array}{lcl} x & \longleftrightarrow & 100\% \\ 756 & \longleftrightarrow & 4.2\% \end{array} \quad x = \frac{756(100)}{4.2} = \frac{75600}{4.2} = \underline{18000}$$

12) De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

$$\begin{array}{lcl} 800 & \longleftrightarrow & 100\% \\ 600 & \longleftrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{600(100)}{800} = \frac{60000}{800} = \underline{75\%}$$

13) Una moto cuyo precio era de \$ 50 000, cuesta en la actualidad \$ 25 000 más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

$$\begin{array}{lcl} 50000 & \longleftrightarrow & 100\% \\ 75000 & \longleftrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{75000(100)}{50000} = \frac{7500000}{50000} = \underline{150\%}$$

14) Al adquirir un vehículo cuyo precio es de \$ 188 000, nos hacen un descuento del 7.5 %. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

$$\begin{array}{lcl} 188000 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 92.5\% \end{array} \quad x = \frac{188000(92.5)}{100} = \frac{17390000}{100} = \underline{\$173900}$$

15) Al comprar un monitor que cuesta \$ 45 000 nos hacen un descuento del 8 %. ¿Cuánto tenemos que pagar?

$$\begin{array}{lcl} 45000 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 92\% \end{array} \quad x = \frac{45000(92)}{100} = \frac{4140000}{100} = \underline{\$41400}$$

16) Se vende un artículo con una ganancia del 15 % sobre el precio de costo. Si se ha comprado en \$ 8 000. Halla el precio de venta.

$$\begin{array}{lcl} 8000 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 115\% \end{array} \quad x = \frac{8000(115)}{100} = \frac{920000}{100} = \underline{\$9200}$$

17) Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha aumentado a \$ 1 800 para ganar al venderlo el 10 %.

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & 110\% \\ 1800 & \longleftrightarrow & 10\% \end{array} \quad x = \frac{1800(110)}{10} = \frac{198000}{10} = \underline{\$19800}$$

18) ¿Qué precio de venta hemos de poner a un artículo comprado a \$ 2 800, para que tenga un descuento del 12 % sobre el precio de venta?

$$\begin{array}{ccc} 2800 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 88\% \end{array} \quad x = \frac{2800(88)}{100} = \frac{246400}{100} = \underline{\$2464}$$

19) Se vende un objeto perdiendo el 20 % sobre el precio de compra. Halla el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de \$ 1 500.

$$\begin{array}{ccc} 1500 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 80\% \end{array} \quad x = \frac{1500(80)}{100} = \frac{120000}{100} = \underline{\$1200}$$

20) En una ciudad de 23 500 habitantes, el 68 % están contentos con la gestión municipal. ¿Cuántos ciudadanos son?

$$\begin{array}{ccc} 23500 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 68\% \end{array} \quad x = \frac{23500(68)}{100} = \frac{1598000}{100} = \underline{15980}$$

21) En el estacionamiento de unos grandes almacenes hay 420 coches, de los que el 35 % son blancos. ¿Cuántos coches hay de los otros colores?

$$\begin{array}{ccc} 420 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 65\% \end{array} \quad x = \frac{420(65)}{100} = \frac{27300}{100} = \underline{273}$$

22) Por haber ayudado a mi hermano en un trabajo, me da el 12 % de los \$ 5 500 que ha cobrado. ¿Cuánto dinero recibiré?

$$\begin{array}{ccc} 5500 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 12\% \end{array} \quad x = \frac{5500(12)}{100} = \frac{66000}{100} = \underline{\$660}$$

23) Pedro posee el 51 % de las acciones de un negocio. ¿Qué cantidad le corresponde si los beneficios han sido de \$ 740 500?

$$\begin{array}{ccc} 740500 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 51\% \end{array} \quad x = \frac{740500(51)}{100} = \frac{37765500}{100} = \underline{\$377655}$$

24) Para el cumpleaños de mi hermano han comprado dos docenas de pasteles y yo me he comido 9. ¿Qué porcentaje del total me he comido?

$$\frac{9}{24} = 0.375 = \underline{37.5\%}$$



25) Una máquina que fabrica tornillos produce un 3 % de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 51 tornillos defectuosos, ¿cuántas piezas ha fabricado la máquina?

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & 100\% \\ 51 & \longleftrightarrow & 3\% \end{array} \quad x = \frac{51(100)}{3} = \frac{5100}{3} = \underline{1700}$$

26) En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ausencias?

$$\frac{6}{30} = 0.2 = \underline{20\%}$$

27) Un hospital tiene 420 camas ocupadas, lo que representa el 84 % del total. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & 100\% \\ 420 & \longleftrightarrow & 84\% \end{array} \quad x = \frac{420(100)}{84} = \frac{42000}{84} = \underline{500}$$

28) De 475 hombres encuestados solamente 76 declaran saber planchar. ¿Qué porcentaje de hombres reconocen saber planchar?

$$\frac{76}{475} = 0.16 = \underline{16\%}$$

29) El 24 % de los habitantes de un pueblo tienen menos de 30 años. ¿Cuántos habitantes tiene el pueblo si hay 90 jóvenes menores de 30 años?

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & 100\% \\ 90 & \longleftrightarrow & 24\% \end{array} \quad x = \frac{90(100)}{24} = \frac{9000}{24} = \underline{375}$$

30) ¿Cuánto me costará un abrigo de \$ 3 600 si me hacen una rebaja del 20 %?

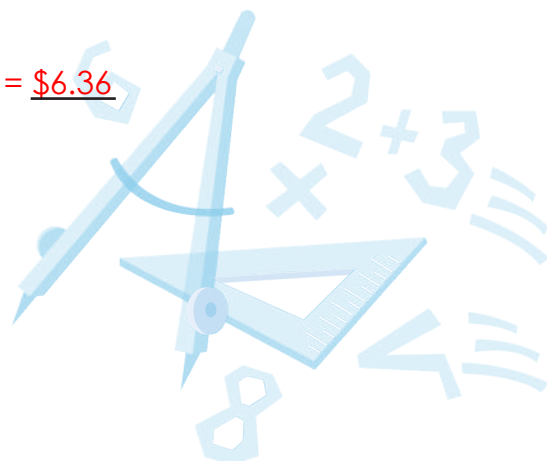
$$\begin{array}{ccc} 3600 & \longleftrightarrow & 100\% \\ x & \longleftrightarrow & 80\% \end{array} \quad x = \frac{3600(80)}{100} = \frac{288000}{100} = \underline{\$2880}$$

31) En una tienda en la que todo está rebajado el 15 % he comprado un pantalón por el que he pagado \$ 1 200. ¿Cuál era el precio antes de la rebaja?

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & 100\% \\ 1200 & \longleftrightarrow & 85\% \end{array} \quad x = \frac{1200(100)}{85} = \frac{120000}{85} = \underline{\$1411.7647}$$

32) Hoy ha subido el precio del pan el 10 %. Si una barra me ha costado \$ 7, ¿cuánto valía ayer?

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & 100\% \\ 7 & \longleftrightarrow & 110\% \end{array} \quad x = \frac{7(100)}{110} = \frac{700}{110} = \underline{\$6.36}$$



INTERÉS SIMPLE

Se denomina interés simple al interés que se aplica siempre sobre el capital inicial, debido a que los intereses generados no se capitalizan.

El interés simple es un tipo de interés que **siempre se calcula sobre el capital inicial** sin la capitalización de los intereses, de suerte que los intereses generados no se incluyen en el cálculo futuro de los intereses, permaneciendo el capital fijo, es decir es el resultado que se obtiene cuando los intereses producidos durante el tiempo que dura una inversión se deben **únicamente al capital inicial**.

Si depositamos un capital C en un banco durante un año, el banco nos dará una cantidad I , llamada interés, que se obtiene aplicando un porcentaje $r\%$, llamado rédito, a la cantidad C .

Si depositamos el capital durante t años, el interés se calculará con la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

I = Intereses

C = Capital

r = rédito (%)

t = Tiempo

Ejemplo:

Un capital de \$ 10 000 a un interés del 5% mensual prestado por 12 meses.

$$I = \frac{10\,000 \cdot 5 \cdot 12}{100}$$

$$I = \frac{600\,000}{100}$$

$$I = 6\,000$$

El interés anual es de \$ 6 000

Vemos que \$ 6 000 corresponde a 12 meses si se quiere saber cuántos intereses es mensual sólo divide entre 12.

$$I = \frac{6\,000}{12}$$

$$I = 500$$

El interés mensual que debe pagarse es de \$ 500



Ejercicio:

Resuelve los siguientes problemas.

- 1) Calcula el interés que generan \$ 2 500 durante 8 meses al 8 %.

$$I = \frac{2500(8)(8)}{100} = \underline{\$1600}$$

- 2) Calcula el interés que generan \$ 60 000 durante 63 días al 9 %.

$$I = \frac{60000(9)(63)}{100} = \underline{\$340200}$$

- 3) Calcula el interés que generan \$ 12 000 durante 3 meses al 8.5 %.

$$I = \frac{12000(8.5)(3)}{100} = \underline{\$3060}$$

- 4) Calcula el interés que generan \$ 15 000 al 10 % en el tiempo transcurrido entre el 4 de abril y el 18 de septiembre.

$$I = \frac{15000(10)(168)}{100} = \underline{\$252000}$$

- 5) Calcula el interés que produce un capital de \$ 16 000 con un interés simple del 3.25 % durante 4 años.

$$I = \frac{16000(4)(3.25)}{100} = \underline{\$2080}$$

- 6) Calcular el interés que produce un capital de \$ 22 800 colocado a un interés simple del 4.5 % durante 21 meses.

$$I = \frac{22800(4.5)(21)}{100} = \underline{\$21546}$$

- 7) Calcular el interés que produce un capital de \$ 26 500 a un interés simple del 2 % durante 329 días.

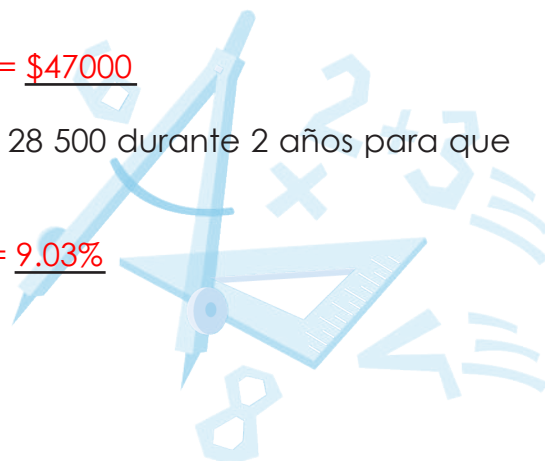
$$I = \frac{26500(2)(329)}{100} = \underline{\$174370}$$

- 8) Calcular el capital que hay que prestar durante 3 años a un rédito del 4 % para que produzca un interés de \$ 5 640.

$$C = \frac{5640(100)}{(3)(4)} = \frac{564000}{12} = \underline{\$47000}$$

- 9) Calcular el rédito al que hay que cobrar un capital de \$ 28 500 durante 2 años para que produzca un interés de \$ 5 150.

$$r = \frac{5150(100)}{28500(2)} = \frac{515000}{57000} = \underline{9.03\%}$$



10) ¿Cuántos años hay que prestar un capital de \$ 8 500 a un rédito del 3.75 % para que produzca un interés de \$ 2 868.75?

$$t = \frac{2868.75(100)}{8500(3.75)} = \frac{286875}{31875} = \underline{9 \text{ años}}$$

11) Calcular el capital que hay que prestar durante 10 meses a un rédito del 5 % para que produzca un interés de \$ 2 956.

$$c = \frac{2956(100)}{10(5)} = \frac{295600}{50} = \underline{\$5912}$$

12) Calcular el rédito al que hay que prestar un capital de \$ 29 500 durante 8 meses para que produzca un interés de \$ 1 710.

$$r = \frac{1710(100)}{29500(8)} = \frac{171000}{236000} = \underline{0.72\%}$$

13) Calcular el interés que produce un capital de \$ 10 400 colocado a un interés simple del 1.5 % durante 163 días.

$$I = \frac{10400(1.5)(163)}{100} = \underline{\$25428}$$

14) ¿Cuántos meses hay que prestar un capital de \$ 40 950 a un rédito del 2 % mensual para que produzca un interés de \$ 1 802?

$$t = \frac{1802(100)}{40950(2)} = \frac{180200}{81900} = \underline{2.2 \text{ meses}}$$

15) Calcular el interés simple producido por \$ 30 000 durante 90 días a una tasa de interés anual del 5 %.

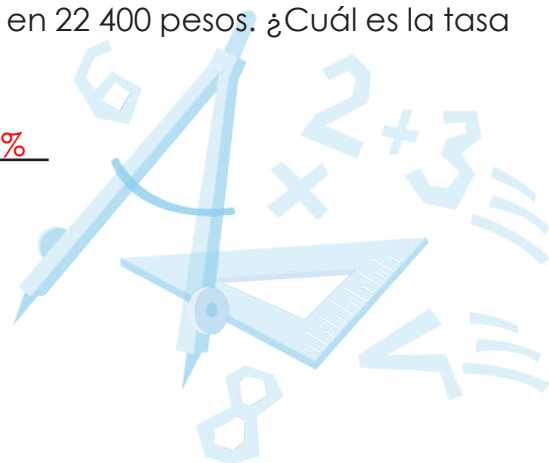
$$I = \frac{30000(0.25)(5)}{100} = \underline{\$375}$$

16) Al cabo de un año, un banco ha ingresado en una cuenta de ahorro, en concepto de intereses, \$ 970. La tasa de interés de una cuenta de ahorro es del 2 % anual. ¿Cuál es el capital de dicha cuenta en ese año?

$$c = \frac{970(100)}{(2)(1)} = \frac{97000}{2} = \underline{\$ 48500}$$

17) Un préstamo de \$ 20 000 se convierte al cabo de un año en 22 400 pesos. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?

$$r = \frac{2400(100)}{20000(1)} = \frac{240000}{20000} = \underline{12\%}$$



18) Un capital de 300 000 pesos invertido a una tasa de interés del 8 % durante un cierto tiempo, ha generado un interés de 12 000 pesos. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?

$$t = \frac{12000(100)}{300000(8)} = \frac{1200000}{2400000} = \underline{0.5\%}$$

19) Calcula a cuánto asciende el interés simple producido por un capital de 25 000 pesos invertido durante 4 años a una tasa del 6 % anual.

$$I = \frac{25000(6)(4)}{100} = \underline{\$6000}$$

20) Si invertimos nuestros ahorros de \$ 10 000 en un banco donde al cabo de 30 días nos devolverán \$ 10 500, ¿cuál es el porcentaje de rendimiento obtenido?

$$r = \frac{500(100)}{10000(30)} = \frac{50000}{300000} = \underline{0.167\%}$$

21) ¿Qué capital produce un interés de \$ 1 240, si es invertido durante 6 meses al 4% de interés mensual?

$$c = \frac{1240(100)}{6(4)} = \frac{124000}{24} = \underline{\$5166.67}$$

22) El administrador general de cierta tienda departamental manufacturera deposita \$ 63 500 en una institución bancaria que paga el 18% de interés simple anual. ¿Cuánto podrá acumular si retira su dinero 18 meses después de haberlo depositado?

$$I = \frac{63500(18)(1.5)}{100} = \underline{\$17145}$$

23) Se prestan \$ 45 000 y al cabo de un año, 4 meses y 20 días se reciben \$ 52 500. Calcula el tanto por ciento de interés.

$$r = \frac{7500(100)}{45000(16.67)} = \frac{750000}{750150} = \underline{0.99\%}$$

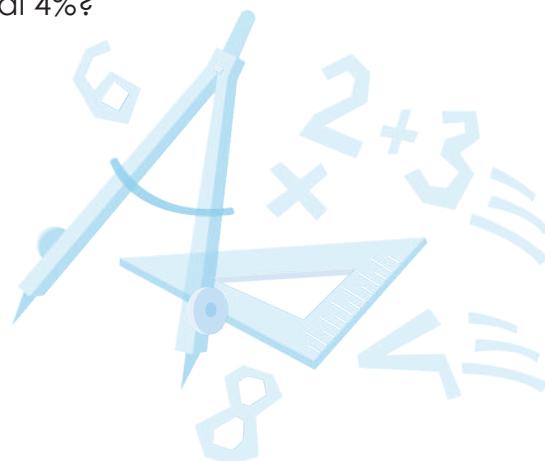
24) Calcula el interés producido por \$ 2 500 al 5% anual durante 3 años. Cuánto producirán durante 15 meses?

$$I = \frac{2500(5)(3)}{100} = \underline{\$375}$$

$$I = \frac{2500(5)(1.5)}{100} = \underline{\$187.5}$$

25) ¿Qué capital produce unos intereses de \$ 50 en 45 días al 4%?

$$c = \frac{50(100)}{45(4)} = \frac{5000}{180} = \underline{\$27.78}$$



26) Si Federico ha depositado \$ 3 000 y al cabo de 2 años tiene \$ 3 300, ¿qué tipo de interés anual se ha aplicado a ese depósito?

$$r = \frac{300(100)}{3000(2)} = \frac{30000}{6000} = \underline{5\%}$$

27) Juan ha hecho un depósito de \$ 12 000 en un banco donde el interés anual es del 3 % y lo mantiene durante 1 año y 4 meses. ¿Qué capital final obtendrá?

$$I = \frac{12000(3)(1.33)}{100} = \underline{\$478.8}$$

28) Isabel deposita \$ 60 000 en una cuenta corriente a un plazo fijo de 5 años a un 5 % de interés anual. ¿Cuánto dinero tendrá al final de los cinco años?

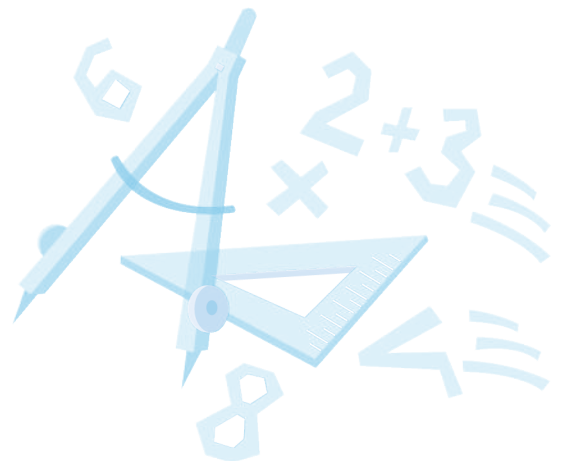
$$I = \frac{60000(5)(5)}{100} = \underline{\$15000}$$

29) Juan pidió un préstamo al banco por valor de \$ 65 000, a pagar en 5 años. Si el banco se lo concedió al 6.5 %, ¿cuánto pagará de intereses?

$$I = \frac{65000(5)(6.5)}{100} = \underline{\$21125}$$

30) Un banco concede \$ 120 000 a pagar durante 10 años al 7 % de interés simple. ¿A cuánto ascenderán los intereses?

$$I = \frac{120000(10)(7)}{100} = \underline{\$84000}$$



INTERÉS COMPUESTO

Otro tipo de interés es el llamado **interés compuesto**, en el que cada cierto tiempo, llamado **periodo de capitalización**, los intereses generados por el capital inicial se añaden al capital y generan más intereses, es decir la diferencia entre el interés simple y el compuesto radica en que en el interés simple sólo genera interés el capital inicial, mientras que en el interés compuesto es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se incrementan mes a mes.

Si llamamos al capital inicial **CI**, al rédito **r** y al tiempo en años **t**, el capital final **CF**, y la formula que hay que aplicar es:

$$CF = CI \left(1 + \frac{F}{100}\right)^t$$

Es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se acumulan.

Ejemplo:

Se deposita un capital de **\$ 8 200** a un interés compuesto del **5.5%** anual durante 6 años. Calcula el capital final después de los 6 años.

$$\begin{aligned} CF &= CI \left(1 + \frac{F}{100}\right)^t \\ CF &= 8\,200 \left(1 + \frac{5.5}{100}\right)^6 \\ CF &= 8\,200(1.055)^6 \\ CF &= 8\,200(1.378) \\ CF &= 11\,299.60 \end{aligned}$$

El capital que tendrá depositado al cabo de 6 años es de \$ 11 299.60

Otra manera que se puede calcular el interés es haciendo una tabla y calcular el interés.

Ejemplo:

En este caso se calcula el interés compuesto al 8 % bimestral en un préstamo de \$ 25 000

Bimestres	Préstamo inicial	Interés compuesto 8%	Adeudo total
0	\$ 25 000	\$ 0.00	\$ 25 000
1	\$ 25 000	\$ 2 000.00	\$ 27 000
2	\$ 27 000	\$ 2 160.00	\$ 29 160
3	\$ 29 160	\$ 2 332.80	\$ 31 492.80
4	\$ 31 492.80	\$ 2 519.40	\$ 34 012.20

Ejercicio:

1. El Ing. Sergio Garza va a invertir \$150 000 a 1 año con un interés compuesto de 18 % anual. ¿Cuánto va a recibir al vencimiento de la inversión? Y si lo invirtiera a dos años en las mismas condiciones, ¿Cuánto dinero recibiría después de dos años?

$$CF = 150000 \left(1 + \frac{18}{100}\right)^1 = 150000(1.18) = \underline{\$177000}$$

$$CF = 150000 \left(1 + \frac{18}{100}\right)^2 = 150000(1.3924) = \underline{\$208860}$$

2. Una persona invierte hoy la suma de \$ 100 000 en un banco que paga el 7 % cuatrimestral de interés compuesto, se solicita mostrar la operación de capitalización durante dos años.

Bimestres	Préstamo inicial	Interés compuesto 7%	Adeudo total
1	100 000	7 000	107 000
2	107 000	7 490	114 490
3	114 490	8 014.3	122 504.3
4	122 504.3	8 575.3	131 079.6
5	131 079.60	9 175.57	140 255.17
6	140 255.17	9 817.86	150 073.03

3. Una persona invierte \$ 1 000 a un interés compuesto del 2.5 % mensual durante 12 meses. Calcula cuánto dinero tendrá al final del año.

$$CF = 1000 \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^{12} = 1000(1.3448) = \underline{\$1344.8}$$

4. ¿En cuánto se convertirán \$ 20 000 durante 10 años al 4 % de interés compuesto?

$$CF = 20000 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{10} = 20000(1.4802) = \underline{\$29604}$$



PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumento de una, corresponde una disminución para la otra; o que, a toda disminución de una, corresponde un aumento para la otra. Entonces se dice que las dos cantidades son inversamente proporcionales.

Al multiplicar cualquier valor de la primera magnitud por su correspondiente valor de la segunda magnitud, se obtiene siempre el mismo valor. A este valor constante se le llama constante de proporcionalidad inversa.

Primera magnitud	1	2	3	4	5	6
Segunda magnitud	120	60	40	30	24	20

Constante de proporcionalidad inversa

$$1 \cdot 120 = 2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 = 4 \cdot 30 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 120$$

Para resolver un ejercicio de proporcionalidad directa o inversa se puede utilizar:

- La razón de proporcionalidad.
- Una regla de tres.
- Reducción a la unidad.

Ejemplo:

Un grupo de 18 alumnos ha ganado un premio por un trabajo realizado y han recibido \$ 200 cada uno. ¿Cuánto recibirían si hubieran participado sólo 10 alumnos?

alumnos	dinero	dinero	
18	200	$\left\{ \begin{array}{l} a + \text{alumnos} - \text{dinero} \\ a - \text{alumnos} + \text{dinero} \end{array} \right\}$	Proporcionalidad inversa
10	x		

Por tanto, se aplica el inverso multiplicativo

$$\frac{18}{10} = \frac{200}{x}$$

$$\frac{18}{10} = \frac{x}{200}$$

$$x = \frac{18(200)}{10}$$

$$x = 360$$

Recibirían \$ 360 cada uno de los 10 alumnos.



Otra manera es reducción a la unidad

1ª magnitud Numero de alumnos	2ª magnitud Pesos
18	200
9	400
3	1200
1	3600
10	360

\$ 360.00 recibe cada uno de los 10 alumnos

Ejercicio:

1) Si 15 hombres hacen una obra de construcción en 60 días, ¿Cuánto tiempo emplearán 20 hombres para realizar la misma obra?

$$\begin{array}{lcl} 15 & \text{---} & 60 \\ 20 & \text{---} & x \end{array} \quad \begin{array}{l} a + \text{hombres} - \text{días} \\ a - \text{hombres} + \text{días} \end{array} \quad \frac{15}{20} = \frac{60}{x} \longrightarrow \frac{15}{20} = \frac{x}{60} \quad x = \frac{60(15)}{20} = \underline{45}$$

2) Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días, ¿Cuántos más deben de añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?

$$\begin{array}{lcl} x & & 28 \\ 4 & & 63 \end{array} \quad \begin{array}{l} a + \text{hombres} - \text{días} \\ a - \text{hombres} + \text{días} \end{array} \quad \frac{x}{4} = \frac{28}{63} \longrightarrow \frac{4}{x} = \frac{28}{63} \quad x = \frac{63(4)}{28} = 9$$

tenemos que añadir 5 hombres

3) Un ciclista recorrió cierta distancia en 4 horas con una velocidad de 60 km/h, ¿Qué velocidad deberá llevar para recorrer la misma distancia en 5 horas?

$$\begin{array}{lcl} 5 & x & \\ 4 & 60 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a + \text{horas} - \text{velocidad} \\ a - \text{horas} + \text{velocidad} \end{array} \quad \frac{5}{4} = \frac{x}{60} \longrightarrow \frac{5}{4} = \frac{60}{x} \quad x = \frac{4(60)}{5} = \underline{48\text{km/h}}$$

4) Si se llenan 24 frascos con capacidad para 250 gramos, con mermelada de fresa, ¿Cuántos frascos de 300 gramos se pueden llenar con la misma cantidad de mermelada?

$$\begin{array}{lcl} 300 & x & \\ 250 & 24 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a + \text{capacidad} - \text{frascos} \\ a - \text{capacidad} + \text{frascos} \end{array} \quad \frac{300}{250} = \frac{x}{24} \longrightarrow \frac{300}{250} = \frac{24}{x} \quad x = \frac{250(24)}{300} = \underline{20 \text{ frascos}}$$

5) En un libro de 80 páginas cada una tiene 35 líneas, ¿Cuántas páginas tendrá el mismo libro si en cada una se colocan 40 líneas?

$$\begin{array}{lcl} 40 & x & \\ 35 & 80 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a + \text{líneas} - \text{páginas} \\ a - \text{líneas} + \text{páginas} \end{array} \quad \frac{40}{35} = \frac{x}{80} \longrightarrow \frac{40}{35} = \frac{80}{x} \quad x = \frac{35(80)}{40} = \underline{70 \text{ páginas}}$$

6) Una piscina se llena en 10 horas con una llave que arroja 120 litros de agua por minuto, ¿Cuántos minutos tardará para llenarse si esta llave arroja 80 litros del líquido?

$$10(60) = 600 \text{ minutos}$$

$$\begin{array}{lcl} 120 & 600 & a + \text{litros} - \text{minutos} \\ 80 & x & a - \text{litros} + \text{minutos} \end{array} \quad \frac{120}{80} = \frac{600}{x} \longrightarrow \frac{120}{80} = \frac{x}{600} \quad x = \frac{120(600)}{80} = \underline{900 \text{ minutos}}$$

7) Un grupo de 45 estudiantes de una secundaria contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar \$ 50; finalmente sólo asisten 30 estudiantes, ¿Cuánto deberá pagar cada uno?

$$\begin{array}{lcl} 45 & 50 & a + \text{estudiantes} - \text{pago} \\ 30 & x & a - \text{estudiantes} + \text{pago} \end{array} \quad \frac{45}{30} = \frac{50}{x} \longrightarrow \frac{45}{30} = \frac{x}{50} \quad x = \frac{45(50)}{30} = \underline{\text{pagan \$75}}$$

8) Una bodega se llena con 3 500 sacos de 6 kg de papas cada uno y otra de la misma capacidad se llena con sacos de 5 kg, ¿Cuántos sacos caben en la segunda bodega?

$$\begin{array}{lcl} 6 & 3500 & a + \text{kg} - \text{sacos} \\ 5 & x & a - \text{kg} + \text{sacos} \end{array} \quad \frac{6}{5} = \frac{3500}{x} \longrightarrow \frac{6}{5} = \frac{x}{3500} \quad x = \frac{6(3500)}{5} = \underline{4200 \text{ sacos}}$$

9) Un ejército de 900 hombres tiene víveres para 20 días; si se desea que las provisiones duren 10 días más, ¿Cuántos hombres habrá que dar de baja?

$$\begin{array}{lcl} 900 & 20 & a + \text{hombres} - \text{días} \\ x & 30 & a - \text{hombres} + \text{días} \end{array} \quad \frac{900}{x} = \frac{20}{30} \longrightarrow \frac{x}{900} = \frac{20}{30} \quad x = \frac{900(20)}{30} = 600$$

hay que dar de baja a 300 hombres

10) Se desea plantar árboles dispuestos en 30 filas, de modo que cada fila tenga 24 de éstos. Si se colocan los mismos árboles en 18 filas, ¿Cuántos se tendrán por fila?

$$\begin{array}{lcl} x & 18 & a + \text{árboles} - \text{filas} \\ 30 & 24 & a - \text{árboles} + \text{filas} \end{array} \quad \frac{x}{30} = \frac{18}{24} \longrightarrow \frac{30}{x} = \frac{18}{24} \quad x = \frac{30(24)}{18} = \underline{40 \text{ árboles}}$$

11) Las ruedas traseras y delanteras de un automóvil tienen un diámetro de 1.5 m y 1 m, respectivamente, cuándo las primeras han dado 350 vueltas. ¿Cuántas han dado las segundas?

$$\begin{array}{lcl} 1.5 & 350 & a + \text{diámetro} - \text{vueltas} \\ 1 & x & a - \text{diámetro} + \text{vueltas} \end{array} \quad \frac{1.5}{1} = \frac{350}{x} \longrightarrow \frac{1.5}{1} = \frac{x}{350} \quad x = \frac{1.5(350)}{1} = \underline{525 \text{ vueltas}}$$

12) Una empresa elaboradora de alimentos para animales envasan su producción en bolsas de 3 kg, 5 kg, 10 kg, 15 kg y 20 kg. Si dispone de 15 toneladas a granel, ¿cuántas bolsas utilizaría en cada caso? Completa la tabla siguiente con los datos que obtuvieron.

Kilogramos	3	5	10	15	20
Número de bolsas	5000	3000	1500	1000	750

$$\frac{15000}{3} = 5000$$

$$\frac{15000}{5} = 3000$$

$$\frac{15000}{10} = 1500$$

$$\frac{15000}{15} = 1000$$

$$\frac{15000}{20} = 750$$

¿Qué sucede con el número de bolsas al aumentar la cantidad de kilogramos en cada una?
disminuye

¿Qué sucede con el número de bolsas al disminuir la cantidad de kilogramos en cada una?
aumenta

13) Seis obreros cargan un camión en tres horas. ¿Cuánto tiempo tardarían nueve obreros en cargar el camión?

$$\begin{array}{lcl} 9 & \times & a + \text{obrerros} - \text{horas} \\ 6 & 3 & a - \text{obrerros} + \text{horas} \end{array} \quad \frac{9}{6} = \frac{x}{3} \longrightarrow \frac{9}{6} = \frac{3}{x} \quad x = \frac{6(3)}{9} = \underline{2 \text{ horas}}$$

14) Un coche a 60 km/h, tarda 4 horas en hacer un viaje. ¿Cuánto tardaría en hacer el mismo viaje a una velocidad de 80 km/h?

$$\begin{array}{lcl} 80 & \times & a + \text{velocidad} - \text{horas} \\ 60 & 4 & a - \text{velocidad} + \text{horas} \end{array} \quad \frac{80}{60} = \frac{x}{4} \longrightarrow \frac{80}{60} = \frac{4}{x} \quad x = \frac{60(4)}{80} = \underline{3 \text{ horas}}$$

15) De una llave salen 7 litros por minuto y llena un tinaco en 3 horas. ¿Cuánto tardaría si la llave disminuye a 4 litros por minuto?

$$3(60) = 180 \text{ minutos}$$

$$\begin{array}{lcl} 7 & 180 & a + \text{litros} - \text{minutos} \\ 4 & x & a - \text{litros} + \text{minutos} \end{array} \quad \frac{7}{4} = \frac{180}{x} \longrightarrow \frac{7}{4} = \frac{x}{180} \quad x = \frac{7(180)}{4} = 315 \text{ minutos}$$

$$\frac{315}{60} = \underline{5 \text{ horas y } 15 \text{ minutos}}$$

16) Un coche recorre hace un recorrido en 3 horas marchando a una velocidad de 100 km/h. ¿Cuántas horas tardaría si va a una velocidad de 150 km/h?

$$\begin{array}{lcl} x & 150 & a + \text{velocidad} - \text{horas} \\ 3 & 100 & a - \text{velocidad} + \text{horas} \end{array} \quad \frac{x}{3} = \frac{150}{100} \longrightarrow \frac{3}{x} = \frac{150}{100} \quad x = \frac{3(100)}{150} = \underline{2 \text{ horas}}$$

17) Calcula el número de días que hubieran necesitado 20 obreros para hacer un trabajo, que otro grupo de 30 obreros lo hizo en 10 días.

$$\begin{array}{lcl} 30 & 10 & a + \text{obrerros} - \text{días} \\ 20 & x & a - \text{obrerros} + \text{días} \end{array} \quad \frac{30}{20} = \frac{10}{x} \longrightarrow \frac{30}{20} = \frac{x}{10} \quad x = \frac{30(10)}{20} = \underline{15 \text{ días}}$$

18) 25 telares producen cierta cantidad de tela en 120 horas. ¿Cuántas horas demoran 60 telares iguales en producir la misma cantidad de tela?

$$\begin{array}{lcl} 60 & x & a + \text{telares} - \text{horas} \\ 25 & 120 & a - \text{telares} + \text{horas} \end{array} \quad \frac{60}{25} = \frac{x}{120} \longrightarrow \frac{60}{25} = \frac{120}{x} \quad x = \frac{25(120)}{60} = \underline{50 \text{ horas}}$$

19) En 6 días, dos personas hacen un trabajo. ¿Cuántos días demoran 3 personas en realizar el mismo trabajo?

$$\begin{array}{lcl} 3 & x & a + \text{personas} - \text{días} \\ 2 & 6 & a - \text{personas} + \text{días} \end{array} \quad \frac{3}{2} = \frac{x}{6} \longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{x} \quad x = \frac{2(6)}{3} = \underline{4 \text{ días}}$$

20) Una casa se pinta en 20 días con 40 hombres. ¿Cuántos hombres se necesitarían si se quiere pintar en 80 días?

$$\begin{array}{lcl} x & 80 & a + \text{hombres} - \text{días} \\ 40 & 20 & a - \text{hombres} + \text{días} \end{array} \quad \frac{x}{40} = \frac{80}{20} \longrightarrow \frac{40}{x} = \frac{80}{20} \quad x = \frac{40(20)}{80} = \underline{10 \text{ días}}$$

21) Una travesía en velero por la bahía demora 50 minutos, a 80 km/h. Si por problemas viento y marejadas no se puede desarrollar más que una velocidad de 50 Km/h, ¿cuánto tiempo se empleará en atravesarla?

$$\begin{array}{lcl} 80 & 50 & a + \text{velocidad} - \text{tiempo} \\ 50 & x & a - \text{velocidad} + \text{tiempo} \end{array} \quad \frac{80}{50} = \frac{50}{x} \longrightarrow \frac{80}{50} = \frac{x}{50} \quad x = \frac{80(50)}{50} = \underline{80 \text{ minutos}}$$



GRÁFICAS DE LA FORMA $y = mx + b$

En la vida diaria se usan magnitudes que están una en función de otra. Las funciones pueden representarse mediante un texto, una tabla de valores, una expresión algebraica o una gráfica.

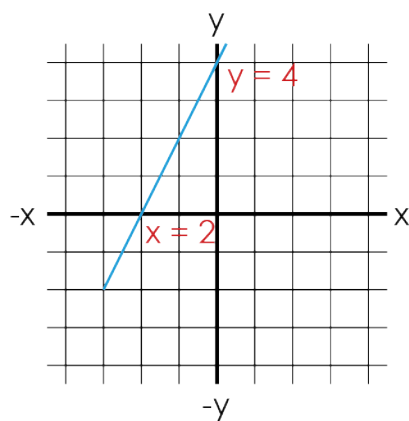
La función $y = mx + b$ es una función lineal donde m es la pendiente, b es el punto donde la recta corta al eje de las ordenadas.

En la función la variable independiente es x y a ella se le asignan diferentes valores.

y es la variable dependiente porque su valor está en función de x .

Algunas veces al leer la información representada en las gráficas sólo se presenta la gráfica y no la función, para obtenerla es necesario calcular la pendiente y después localizar el punto b en donde la recta corta el eje de las ordenadas. Con estos datos se puede formar la función.

Ejemplo:



1) Dada la gráfica se calcula la pendiente m .

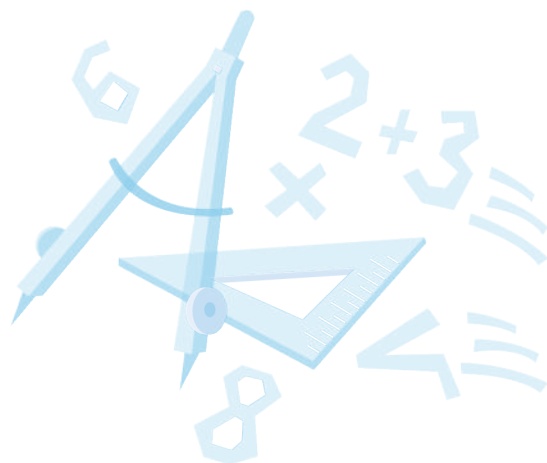
$$m = \frac{y}{x} \qquad m = \frac{4}{2} \qquad m = 2$$

2) El punto b es donde la recta corta el eje de las ordenadas, $b = 4$

3) Tomando la forma de la función $y = mx + b$

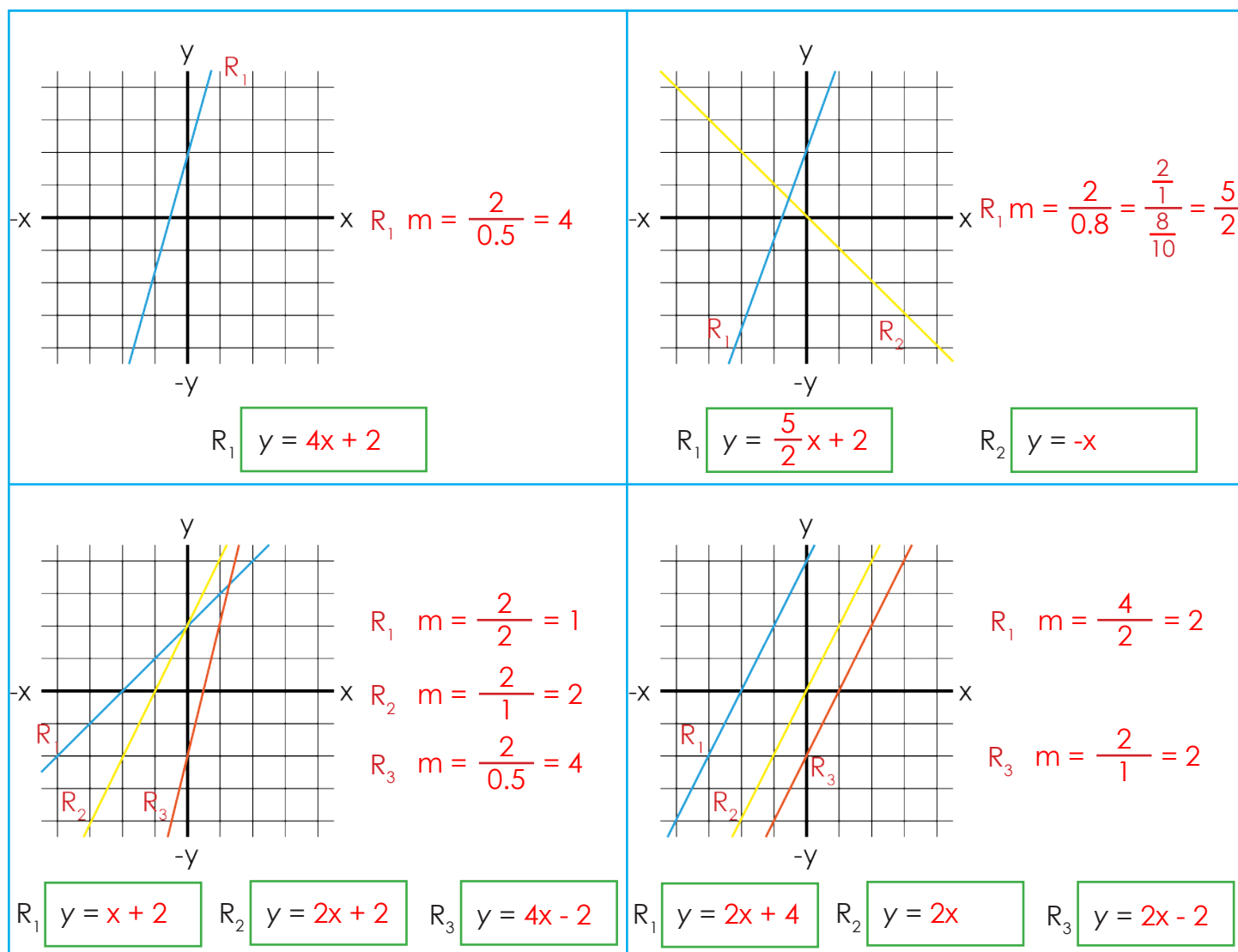
4) Se sustituye los dos valores encontrados:

$y = 2x + 4$ que es la función

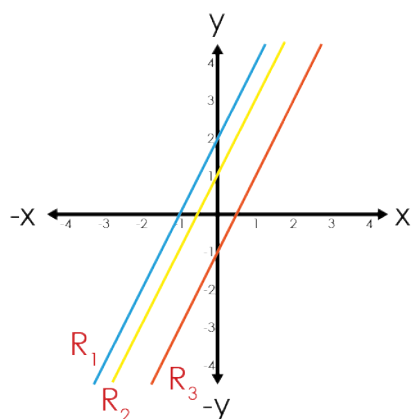


Ejercicio:

1) Encuentra la función de las siguientes gráficas:



2) En la siguiente gráfica, elige la opción que corresponda a la familia de rectas representada.



a) $y = -x + 2$

b) $y = 2x + 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$

$y = x + 2$

$y = \frac{1}{2}x + 2$

$y = -x + 2$

c) $y = 2x + 1$

d) $y = 2x - 1$

$y = 2x + 2$

$y = 2x - \frac{1}{2}$

$y = 2x - 1$

$y = 2x + \frac{1}{2}$

3) Relaciona las gráficas siguientes con sus respectivas ecuaciones:

a) $y = 3x - 4$

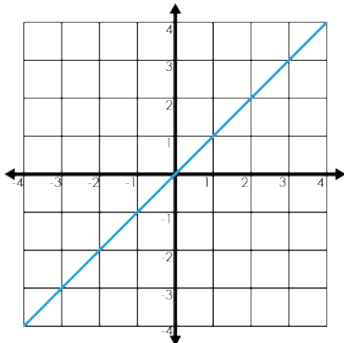
b) $y = 2x$

c) $y = x$

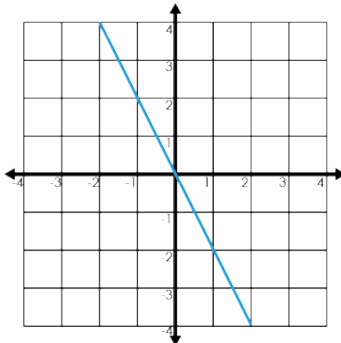
d) $y = -3x - 4$

e) $y = -2x$

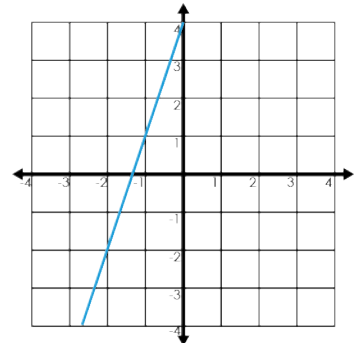
f) $y = 3x + 4$



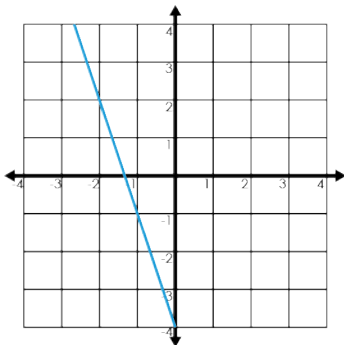
(c)



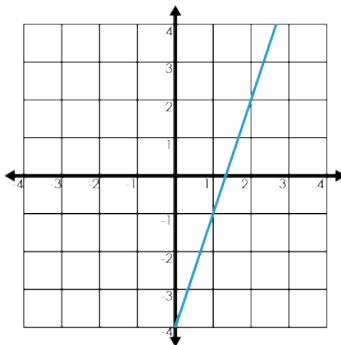
(e)



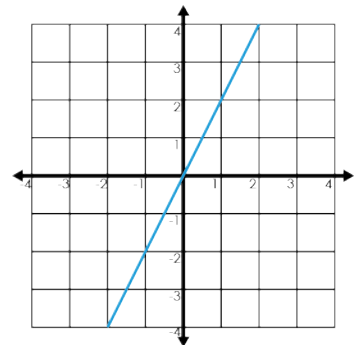
(f)



(d)

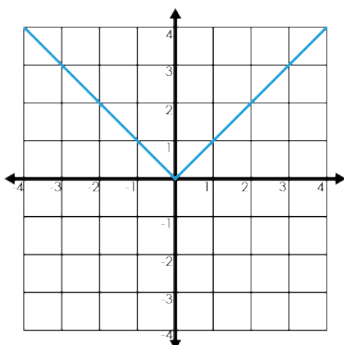


(a)

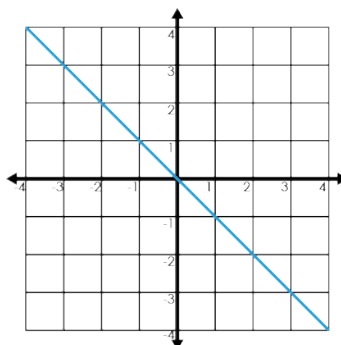


(b)

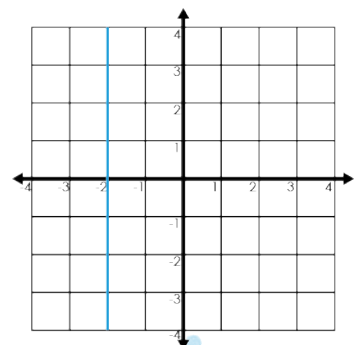
4) Coloca una "x" en la gráfica que representa una función.



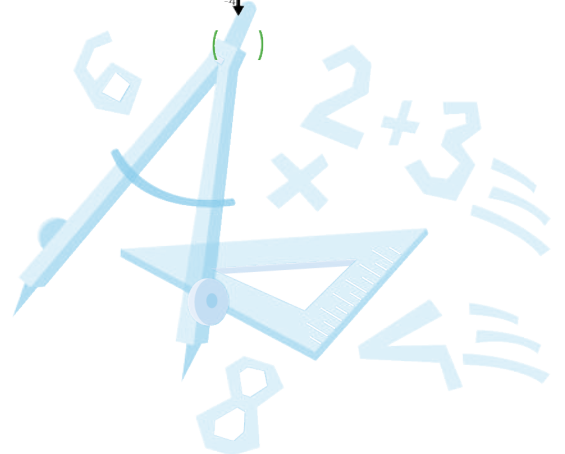
(X)

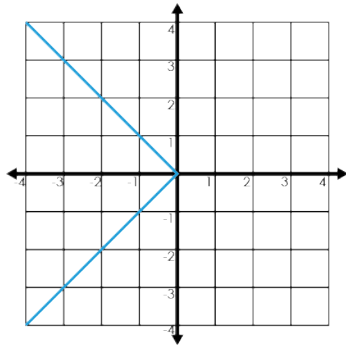


(X)

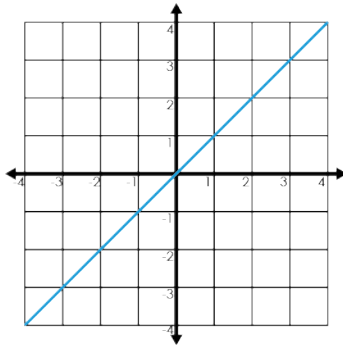


()

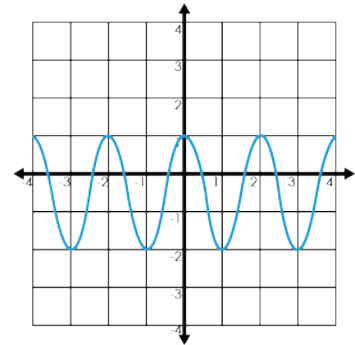




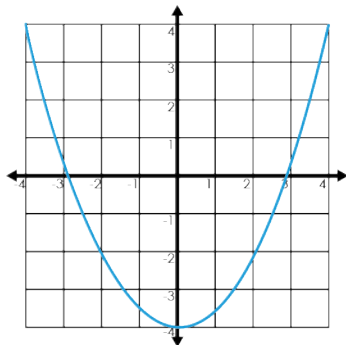
()



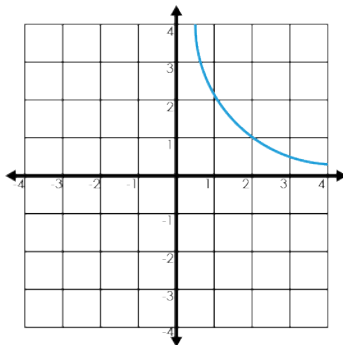
(X)



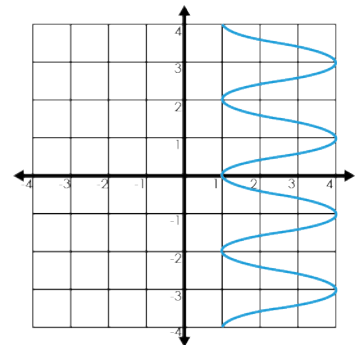
(X)



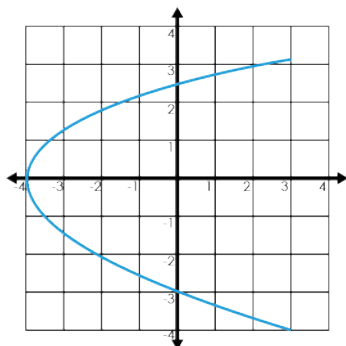
(X)



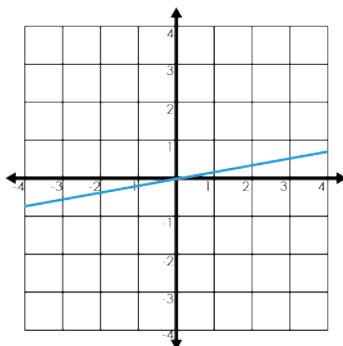
(X)



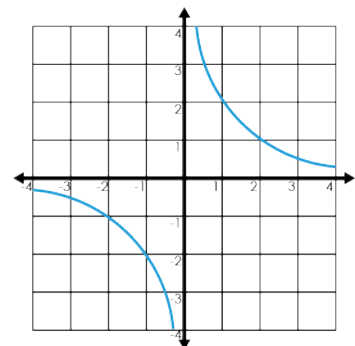
()



()

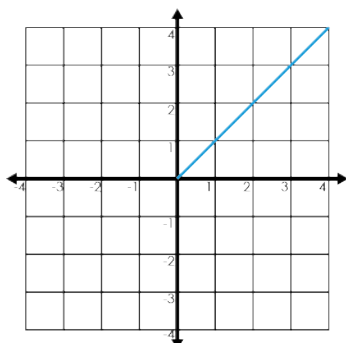


(X)

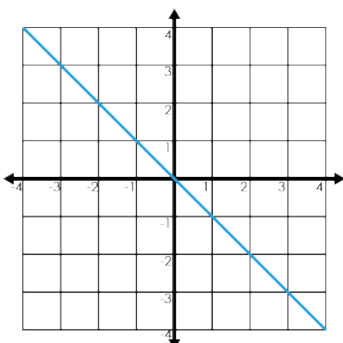


(X)

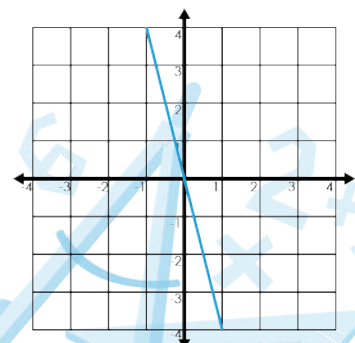
5) Coloca "m +" en la gráfica que tiene una función con pendiente positiva y "m -" en la que tiene pendiente negativa.



(m+)

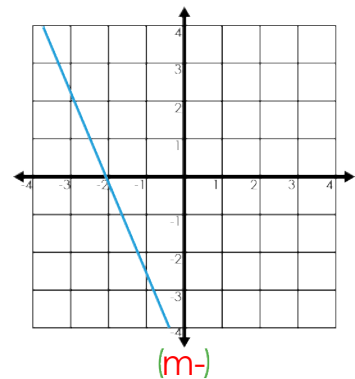
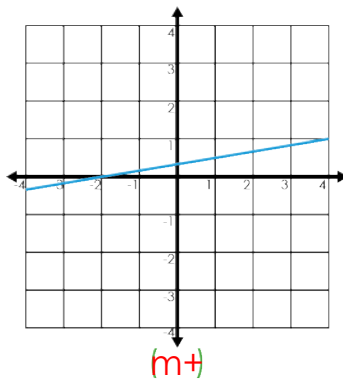
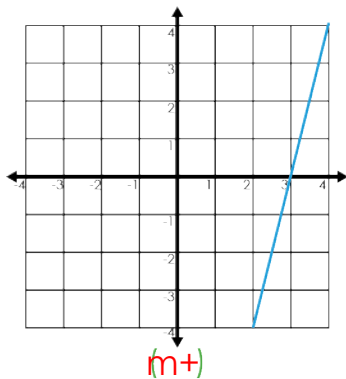
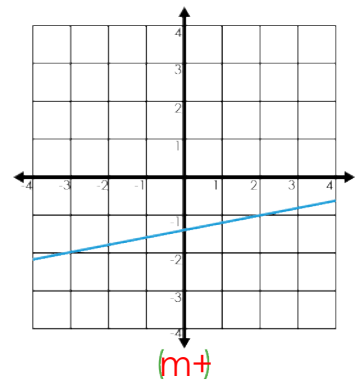
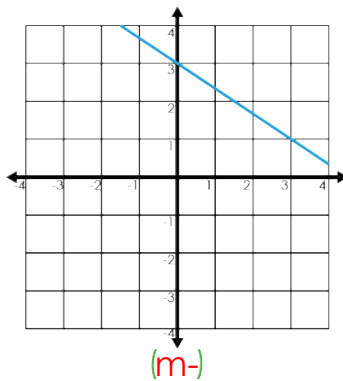
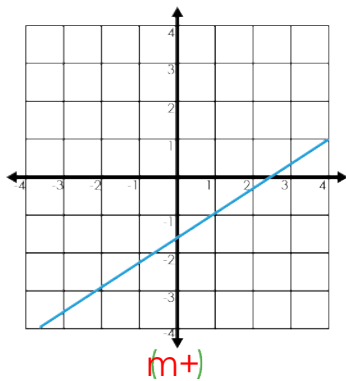
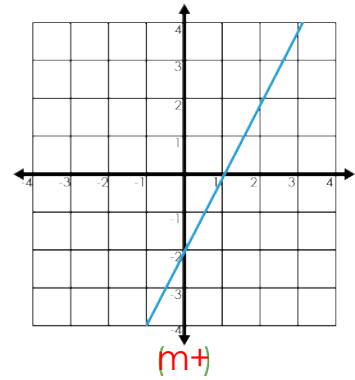
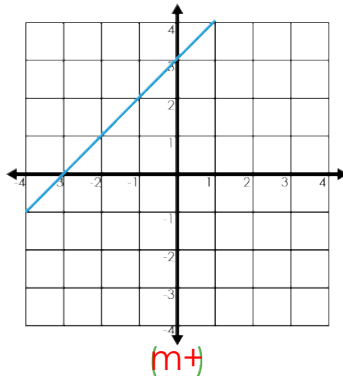
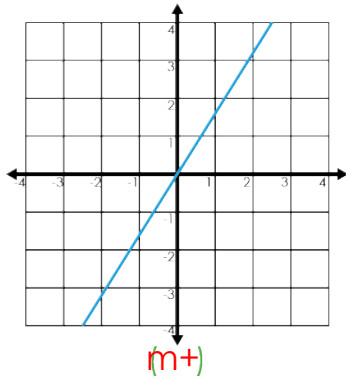


(m-)

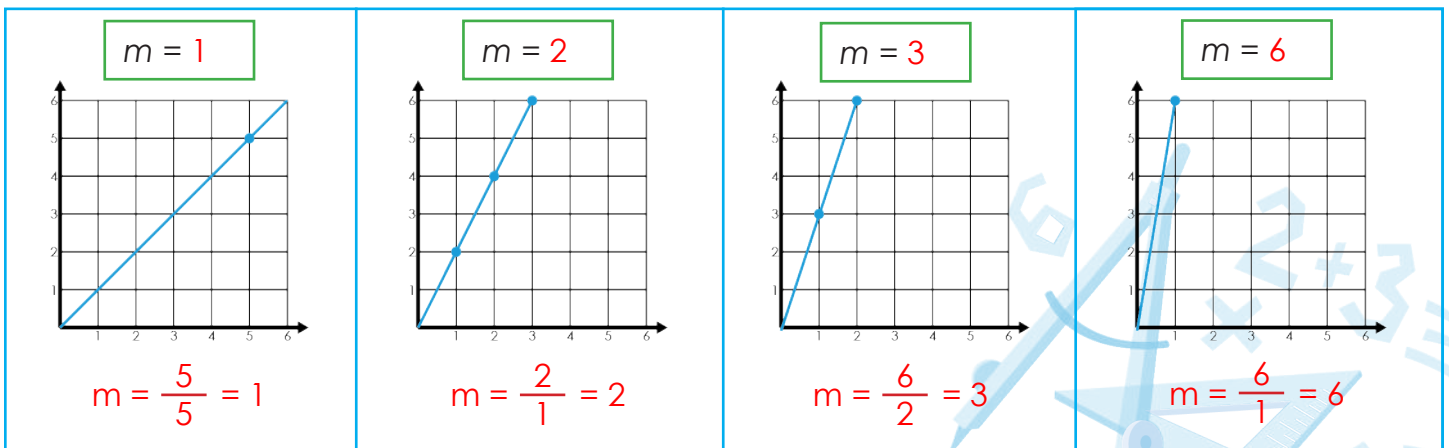


(m-)

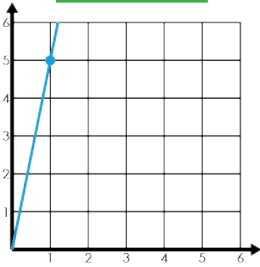




6) ¿Cuál es la pendiente de las siguientes rectas?

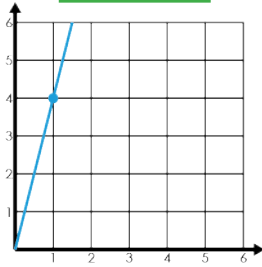


$$m = 5$$



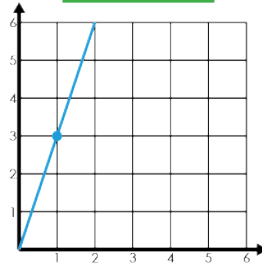
$$m = \frac{5}{1} = 5$$

$$m = 4$$



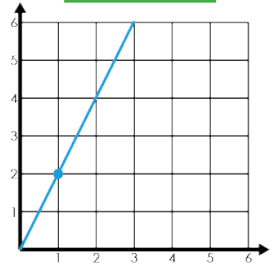
$$m = \frac{4}{1} = 4$$

$$m = 3$$



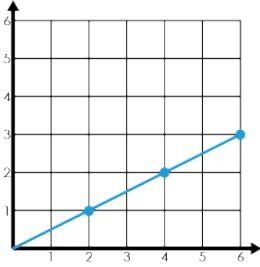
$$m = \frac{3}{1} = 3$$

$$m = 2$$



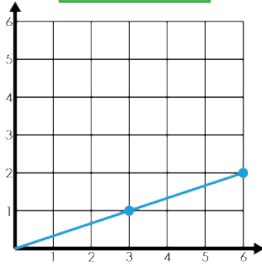
$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$m = \frac{1}{2}$$



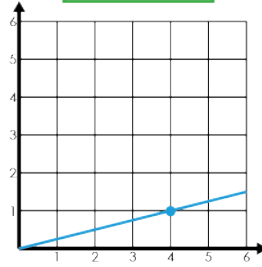
$$m = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{3}$$



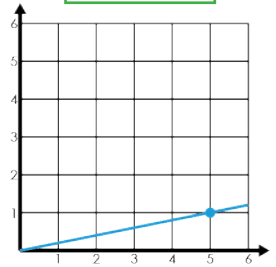
$$m = \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{1}{4}$$



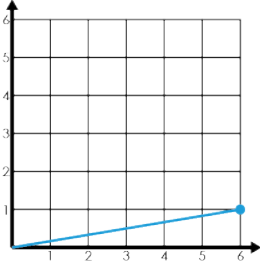
$$m = \frac{1}{4}$$

$$m = \frac{1}{5}$$



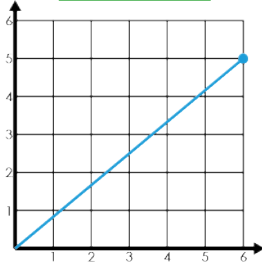
$$m = \frac{1}{5}$$

$$m = \frac{1}{6}$$



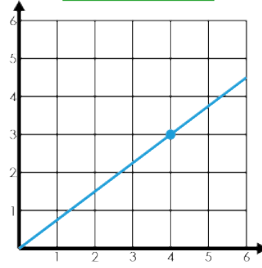
$$m = \frac{1}{6}$$

$$m = \frac{5}{6}$$



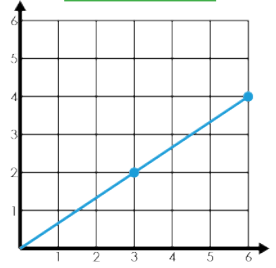
$$m = \frac{5}{6}$$

$$m = \frac{3}{4}$$



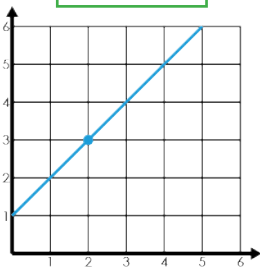
$$m = \frac{3}{4}$$

$$m = \frac{2}{3}$$



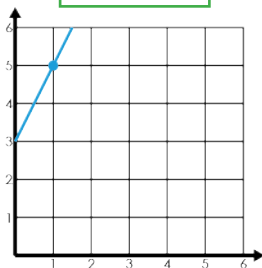
$$m = \frac{2}{3}$$

$$m = 1$$



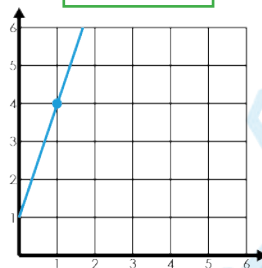
$$m = \frac{2}{2} = 1$$

$$m = 2$$



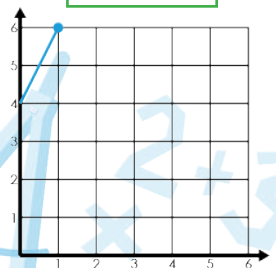
$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$m = 3$$



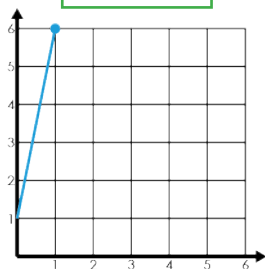
$$m = \frac{3}{1} = 3$$

$$m = 2$$



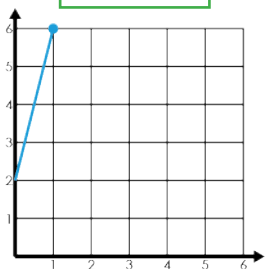
$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$m = 5$$



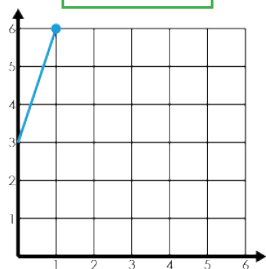
$$m = \frac{5}{1} = 5$$

$$m = 4$$



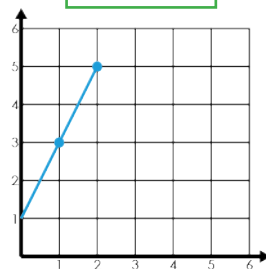
$$m = \frac{4}{1} = 4$$

$$m = 3$$



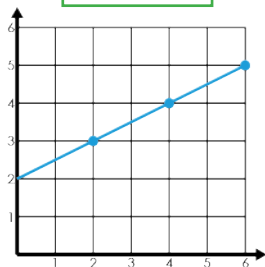
$$m = \frac{3}{1} = 3$$

$$m = 2$$



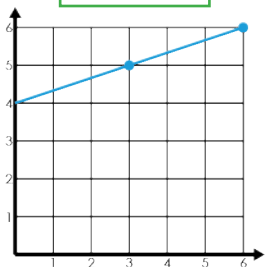
$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$m = \frac{1}{2}$$



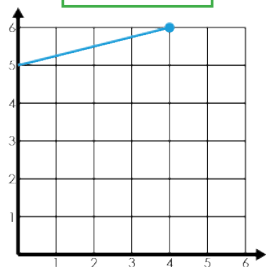
$$m = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{3}$$



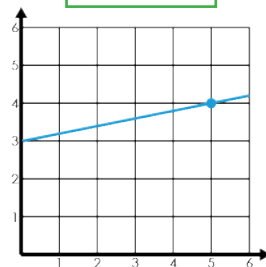
$$m = \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{1}{4}$$



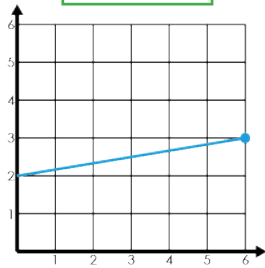
$$m = \frac{1}{4}$$

$$m = \frac{1}{5}$$



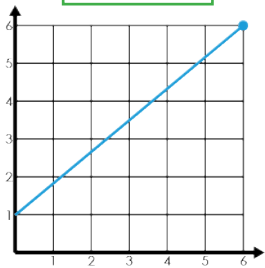
$$m = \frac{1}{5}$$

$$m = \frac{1}{6}$$



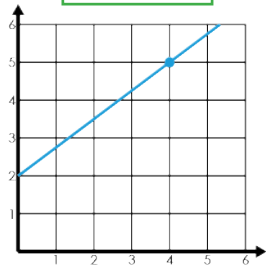
$$m = \frac{1}{6}$$

$$m = \frac{5}{6}$$



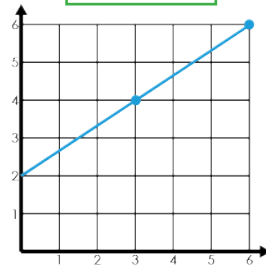
$$m = \frac{5}{6}$$

$$m = \frac{3}{4}$$



$$m = \frac{3}{4}$$

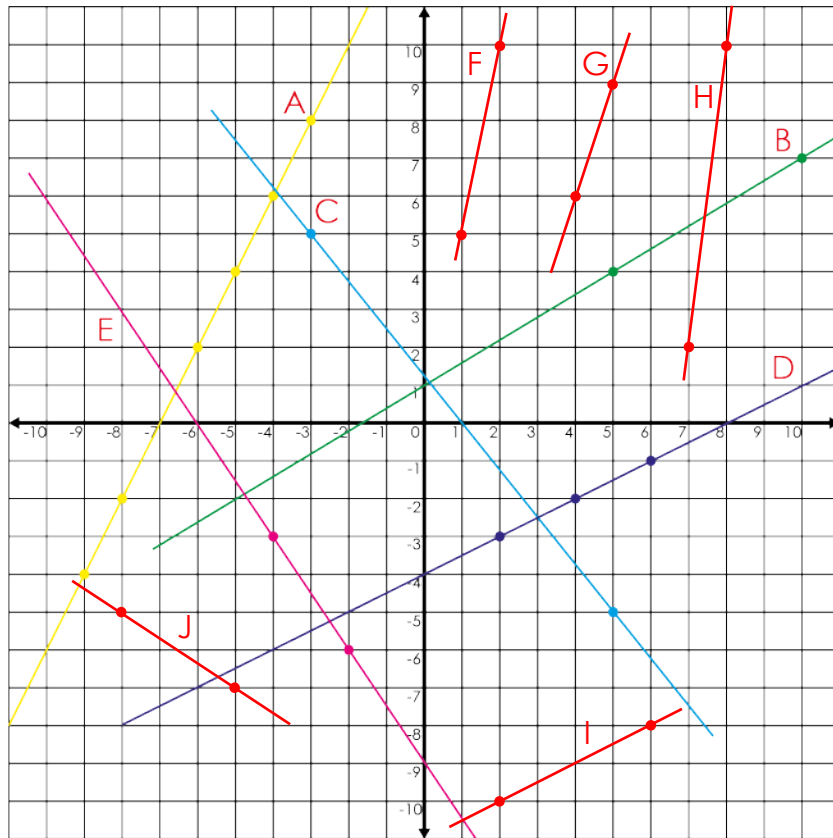
$$m = \frac{2}{3}$$



$$m = \frac{2}{3}$$



- 6) ¿Cuál es la pendiente de las siguientes rectas (A, B, C, D, E)?
 ¿Traza las rectas según la pendiente indicada (F, G, H, I, J)?



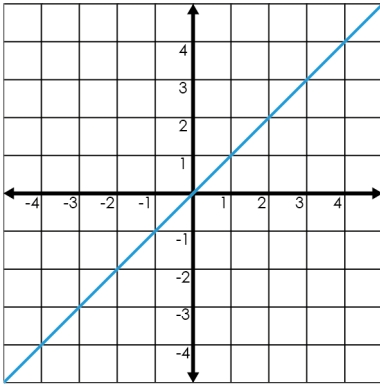
Recta	Pendiente
A	2
B	$\frac{2}{5}$
C	$-\frac{5}{4}$
D	$\frac{1}{2}$
E	$-\frac{3}{2}$

Recta	Pendiente
F	5
G	3
H	8
I	$\frac{2}{4}$
J	$-\frac{2}{3}$



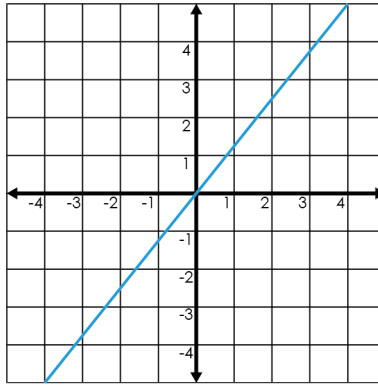
7) ¿De las siguientes rectas determina su pendiente y función recuerda que son de la forma $y = kx$?

$$y = x$$



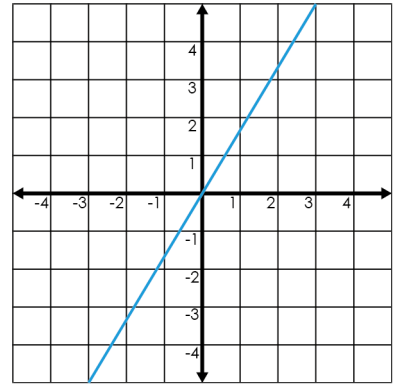
$$m = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{5}{4}x$$



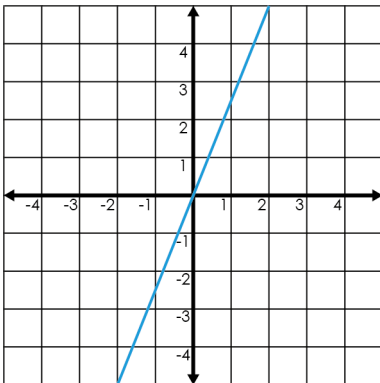
$$m = \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{5}{3}x$$



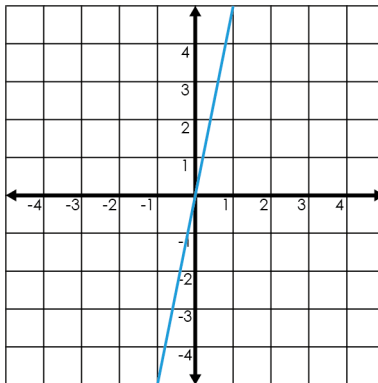
$$m = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{5}{2}x$$



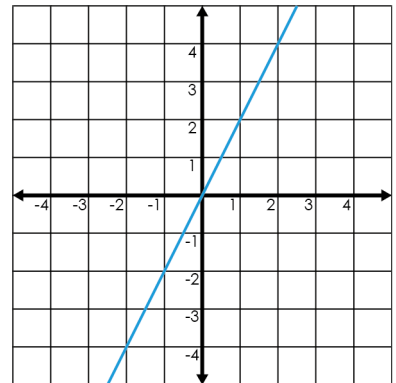
$$m = \frac{5}{2}$$

$$y = 5x$$



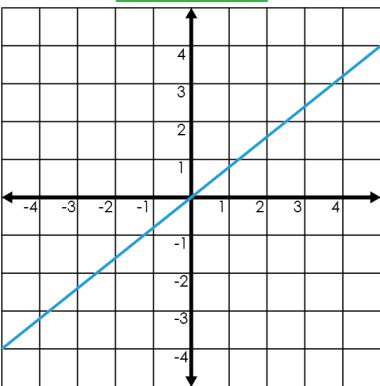
$$m = \frac{5}{1} = 5$$

$$y = 2x$$



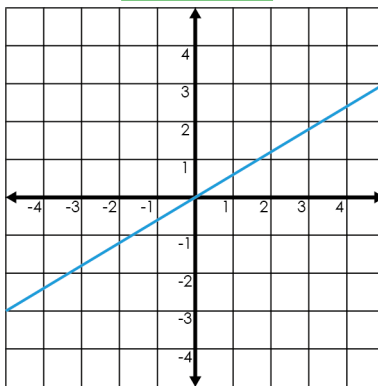
$$m = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{4}{5}x$$



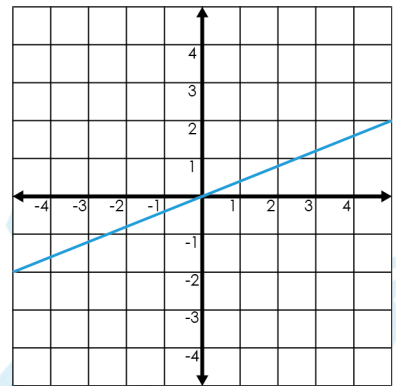
$$m = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x$$



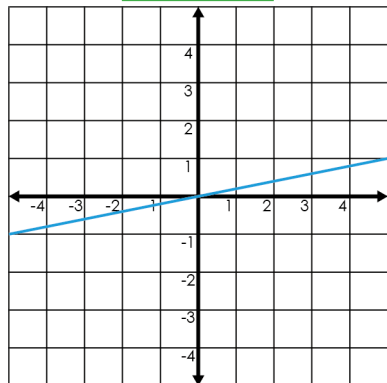
$$m = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{5}x$$



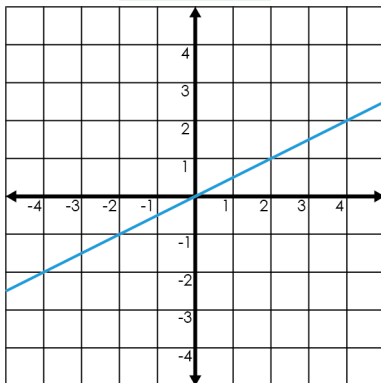
$$m = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}x$$



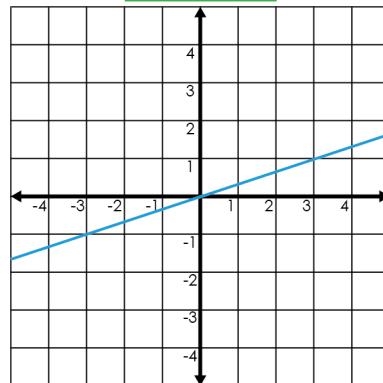
$$m = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$



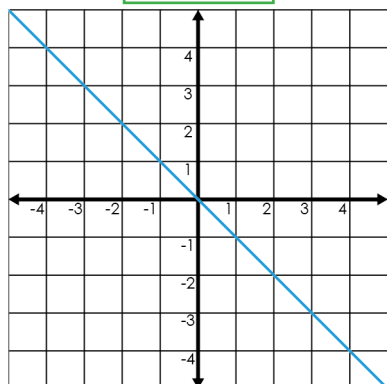
$$m = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{3}x$$



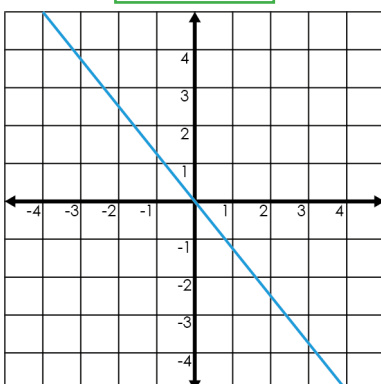
$$m = \frac{1}{3}$$

$$y = -x$$



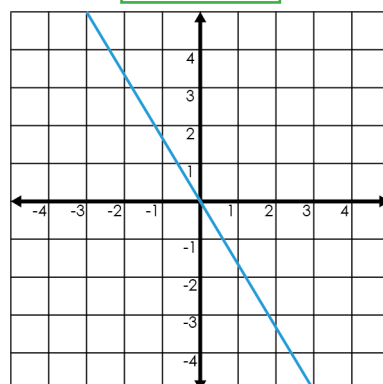
$$m = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$



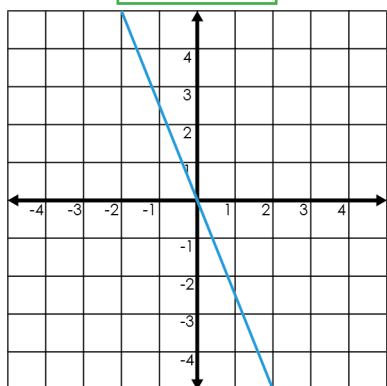
$$m = \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{5}{3}x$$



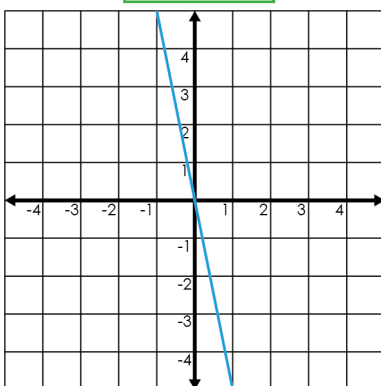
$$m = \frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{5}{2}x$$



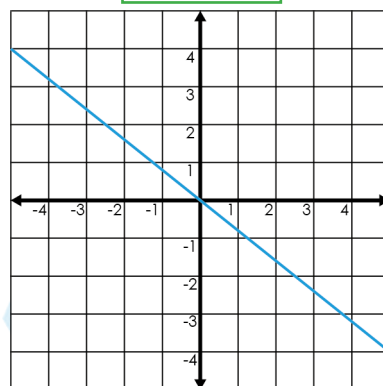
$$m = \frac{5}{2}$$

$$y = -5x$$



$$m = \frac{5}{1} = 5$$

$$y = -\frac{4}{5}x$$

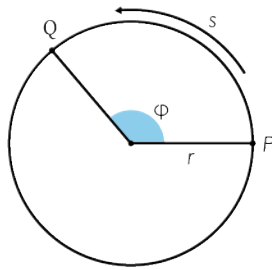


$$m = \frac{4}{5}$$

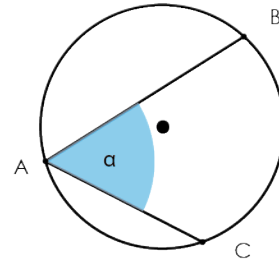
ÁNGULOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Ángulo central: se forma por dos radios, tiene su vértice en el centro de la circunferencia, se mide por el arco subtendido por sus lados.

Ángulo inscrito: se forma por dos cuerdas, tiene su vértice en un punto de la circunferencia, se mide por la mitad del arco subtendido por sus lados.

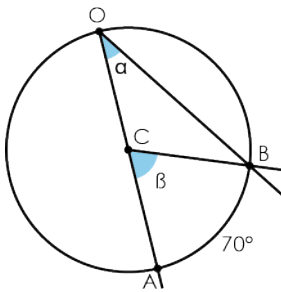


Ángulo Central = arco QP



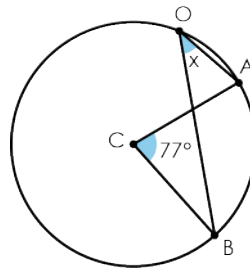
Ángulo inscrito = $\frac{1}{2}$ del arco BC

Resuelve:



Encuentra:

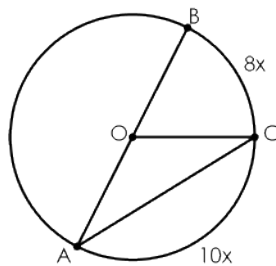
Arco OB: 110°
 Arco OA: 180°
 Arco AB: 70°
 Ángulo β: 70°
 Ángulo α: 35°



Encuentra:

Arco AO: 77°
 Arco BA: 103°
 Arco OB: 180°
 Ángulo x: 26°

$$\begin{aligned} 8x + 10x &= 180^\circ \\ 18x &= 180^\circ \\ x &= \frac{180}{18} \\ x &= 10^\circ \end{aligned}$$



Encuentra:

Arco AC: 100°
 Arco BA: 180°
 Arco CB: 80°
 Ángulo BAC: 40°
 Ángulo BOC: 80°

CORONA CIRCULAR

Parte de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

Corona circular:

$$R = 12 \text{ m} \quad r = 4 \text{ m}$$

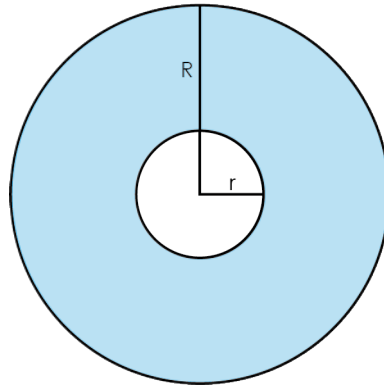
$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

$$A = 3.14 (12^2 - 4^2)$$

$$A = 3.14 \times 128$$

$$A = 401.93 \text{ m}^2$$

Diferencia de áreas



Ejercicio:

1. Calcula el área de una corona circular sabiendo que su radio mayor mide 11 cm y su radio menor mide 7 cm.

$$R = 11 \text{ cm} \quad r = 7 \text{ cm}$$

$$A = 3.14 (11^2 - 7^2)$$

$$A = 3.14 (121 - 49)$$

$$A = 3.14 \times 72$$

$$A = 226.08 \text{ cm}^2$$

2. El área de una corona circular es de 34.54 cm^2 y la diferencia entre sus radios 1 cm. Calcula los radios de las dos circunferencias.

$$R - r = 1$$

$$R = 1 + r$$

$$34.54 = 3.14(R^2 - r^2)$$

$$34.54 = 3.14((1 + r)^2 - r^2)$$

$$34.54 = 3.14(1 + 2r + r^2 - r^2)$$

$$34.54 = 3.14(1 + 2r)$$

$$34.54 = 3.14 + 6.28r$$

$$34.54 - 3.14 = 6.28r$$

$$31.4 = 6.28r$$

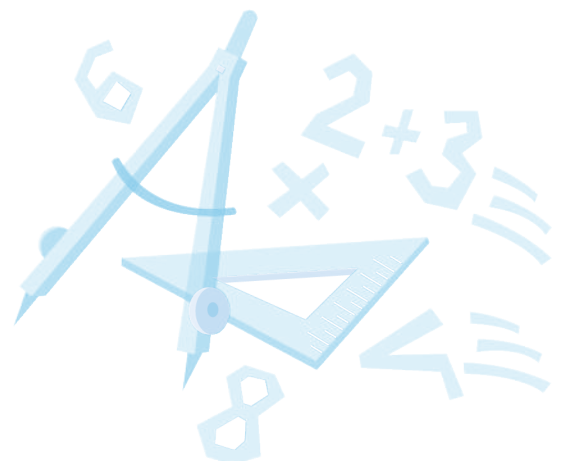
$$\frac{31.4}{6.28} = r$$

$$\underline{5 = r}$$

$$R = 1 + r$$

$$R = 1 + 5$$

$$\underline{R = 6}$$



3. Calcula el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias de radios 3 cm y 5 cm.

$$R = 5 \text{ cm} \quad r = 3 \text{ cm}$$

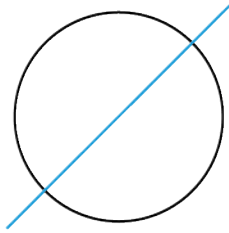
$$A = 3.14 (5^2 - 3^2)$$

$$A = 3.14 (25 - 9)$$

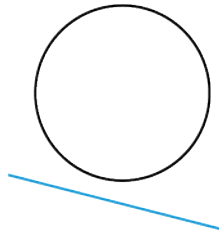
$$A = 3.14 \times 16$$

$$\underline{A = 50.24 \text{ cm}^2}$$

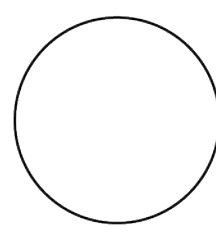
Identifica:



Recta
Secante

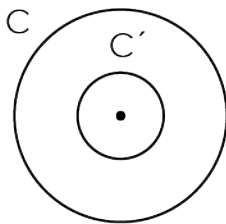


Recta
exterior

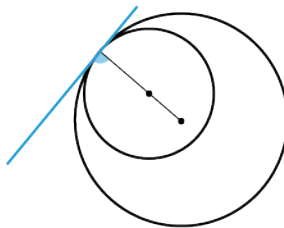


Recta
tangente

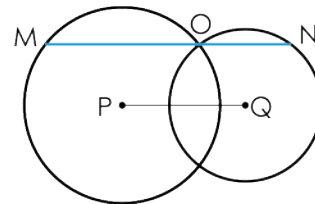
Identifica:



Circunferencias
concentricas



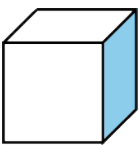
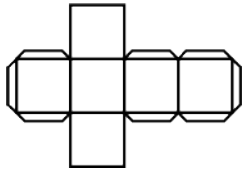
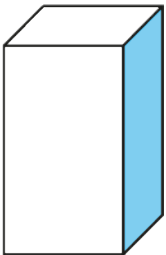
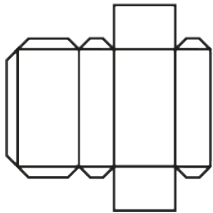
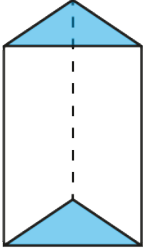
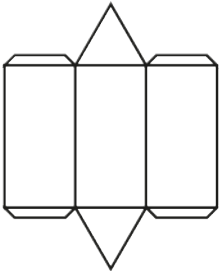
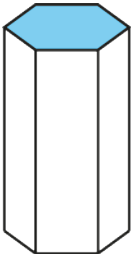
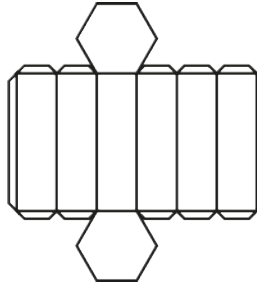
Circunferencias
tangentes interiores



Circunferencias
secantes

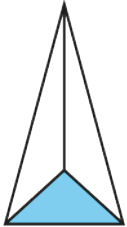
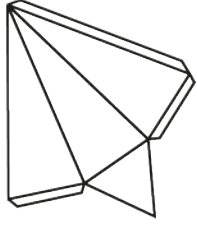

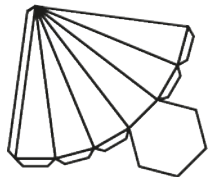
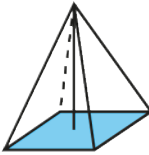
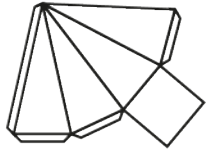


FORMULARIO DE VOLÚMENES DE PRISMAS

Cuerpo	Nombre	Aristas	Vértices	Fórmula de volumen	Desarrollo plano
	Cubo	12	8	$V = \ell^3$ Lado = ℓ	
	Prisma rectangular	12	8	$v = b \cdot a \cdot h$ b = Largo de la base a = Ancho de la base h = Altura del prisma	
	Prisma triangular	9	6	$V = \frac{b \cdot h}{2} (a)$ b = base a = Altura del prisma h = Altura de la base	
	Prisma hexagonal	18	12	$V = \frac{P \cdot ap}{2} (a)$ P = perimetro ap = apotema a = altura	
Generalizando el volumen de los prismas es: Superficie de la base por altura					



FORMULARIO DE VOLÚMENES DE PIRÁMIDES

Cuerpo	Nombre	Aristas	Vértices	Fórmula de volumen	Desarrollo plano
	Pirámide triangular	6	4	$V = \frac{\text{área de la base} \times h}{3}$ $\text{Área de la base} = \frac{bh}{2}$ $h = \text{altura de la pirámide}$	
	Pirámide hexagonal	12	7	$V = \frac{\text{área de la base} \times h}{3}$ $\text{Área de la base} = \frac{P \cdot ap}{2}$ $h = \text{altura de la pirámide}$	
	Pirámide cuadrangular	8	5	$V = \frac{\text{área de la base} \times h}{3}$ $\text{Área de la base} = \ell^2$ $h = \text{altura de la pirámide}$	
Generalizando el volumen de las pirámides es: Superficie de la base por altura entre tres					

Ejercicio:

Completa la tabla siguiente:

Cuerpo	Datos de la base		Altura del cuerpo (cm)	Volumen (cm ³)
	Largo (cm)	Ancho (cm)		
Prisma cuadrangular	9		10	810
Prisma cuadrangular	4		15	240
Prisma rectangular	8	2	5	80
Prisma rectangular	4.5	2	20	180
Pirámide rectangular	5	3	36	180
Pirámide cuadrangular	5		10	83.33

Cuerpo	Datos de la base		Altura del cuerpo (cm)	Volumen (cm ³)
	Largo (cm)	Apotema (cm)		
Prisma pentagonal	5	3	12	450
Pirámide hexagonal	6	4	15	360
Prisma octagonal	6	0.66	20	240

Cuerpo	Datos de la base		Altura del cuerpo (cm)	Volumen (cm ³)
	Largo (cm)	Altura (cm)		
Prisma triangular	3.5	4	12	168
Pirámide triangular	5	9	10	150
Pirámide triangular	4	6	10	40

Resuelve los siguientes problemas:

1) Una pileta de natación tiene 7 m de ancho por 15 m de largo con una profundidad constante de 1.80 m. Si se llena hasta 20 cm antes del borde. ¿Cuál es en m³ el volumen que ocupa el agua que contiene?

$$V = 7\text{m} \cdot 15\text{m} \cdot 1.60\text{m} = \underline{168\text{m}^3}$$

2) La base de un prisma hexagonal regular de lado 1.7 cm y apotema 1.5 cm. Calcula su volumen sabiendo que su altura es 3.9 cm.

$$P = 1.7\text{cm} \cdot 6 = 10.2\text{cm}$$

$$Ab = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{10.2\text{cm}(1.5\text{cm})}{2} = 7.65\text{cm}^2$$

$$V = Ab \cdot h = 7.65\text{cm}^2 \cdot 3.9\text{cm} = \underline{29.835\text{cm}^3}$$

3) La base de esta pirámide pentagonal regular de lado 1.3 cm y de apotema 0.9 cm. Calcula su volumen sabiendo que su altura es 2.7 cm.

$$P = 1.3\text{cm} \cdot 5 = 6.5\text{cm}$$

$$Ab = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{6.5\text{cm}(0.9\text{cm})}{2} = 2.925\text{cm}^2$$

$$V = \frac{2.925\text{cm}^2 \cdot 2.7\text{cm}}{3} = \underline{2.6325\text{cm}^3}$$

4) La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las siete maravillas del mundo antiguo. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?

$$Ab = 230\text{m} \cdot 230\text{m}$$

$$Ab = 52\,900\text{m}^2$$

$$V = \frac{52\,900\text{m}^2 \cdot 137\text{m}}{3} = \underline{2\,415\,766.667\text{m}^3}$$

5) Calcula el volumen en litros, de un cubo de 2 m de arista.

$$V = \ell^3$$

$$V = (2\text{m})^3$$

$$V = 8\text{m}^3$$

$$1\text{m}^3 \text{ ——— } 1000\text{L}$$

$$8\text{m}^3 \text{ ——— } x$$

$$x = \frac{(8\text{m}^3)(1000\text{L})}{1\text{m}^3} = \underline{8000\text{L}}$$

6) Calcula el volumen de un depósito en forma de prisma pentagonal regular cuya altura mide 2.5 cm y el área de la base 80 cm².

$$V = Ab \cdot h$$

$$V = 80\text{cm}^2 \cdot 2.5\text{cm}$$

$$V = \underline{200\text{cm}^3}$$



7) El volumen de un cubo mide 2 197 cm³. Calcula el lado del cubo.

$$V = 2\,197\text{cm}^3$$

$$\ell = \sqrt[3]{2\,197\text{cm}^3}$$

$$\ell = \underline{13\text{cm}}$$

8) La carpa de un circo tiene forma de prisma octogonal regular. Su techo es una pirámide de altura igual a la tercera parte de la altura del prisma. Si la arista básica del prisma es 5 m y la altura total (prisma y pirámide incluidos) es de 24 m, calcula la cantidad de lona necesaria para construir la carpa.

1) Altura del prisma

$$x + \frac{x}{3} = 24\text{m}$$

$$\frac{3x + x}{3} = 24\text{m}$$

$$3x + x = 24\text{m}(3)$$

$$4x = 72\text{m}$$

$$x = 72\text{m}/4$$

$$x = 18\text{m}$$

2) Área del prisma = área de sus lados
(por que abajo y arriba no tiene lona)

área de rectángulo área del prisma

$$a = b \times h$$

$$a = (5\text{m})(18\text{m})$$

$$a = 90\text{m}^2$$

$$ap = (90\text{m}^2)(8)$$

$$ap = 720\text{m}^2$$

3) Apotema de pirámide

$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$ap = \frac{5\text{m}}{2 \cdot \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)} = 6.03\text{m}$$

4) Altura de pirámide

$$\frac{18}{3} = 6\text{m}$$

5) Altura de triángulo
que forma la pirámide

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{(6)^2 + (6.03)^2}$$

$$c = \sqrt{36 + 36.3609}$$

$$c = \sqrt{72.3609}$$

$$c = 8.5\text{m}$$

6) Área de la pirámide

$$a = \frac{b \times a}{2}$$

$$a = \frac{(5)(8.5)}{2} = 21.25\text{m}^2$$

$$ap = (21.25)(8) = 170\text{m}^2$$

7) Área total

$$at = 720\text{m}^2 + 170\text{m}^2$$

$$at = \underline{890\text{m}^2}$$

9) Calcula el volumen de un edificio formado por un ortoedro de dimensiones 10 m x 10 m x 6 m y una pirámide cuadrangular de altura 9 m y de lado 6 m.

volumen prisma

$$v = b \cdot a \cdot h$$

$$v = (10\text{m})(10\text{m})(6\text{m})$$

$$v = 600\text{m}^3$$

área de la base

$$ab = \ell^2$$

$$ab = (6\text{m})^2$$

$$ab = 36\text{m}^2$$

volumen de pirámide

$$v = \frac{ab \cdot h}{3}$$

$$v = \frac{(36\text{m}^2)(9\text{m})}{3} = 108\text{m}^3$$

volumen total

$$vt = 600\text{m}^3 + 108\text{m}^3$$

$$vt = \underline{708\text{m}^3}$$

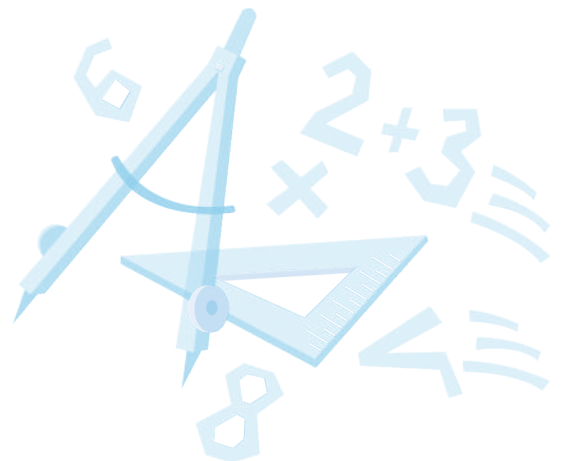
10) Halla el volumen de un salón de clase cuya área de la base es 40 m² y su altura es 2.5 m.

volumen de salón

$$v = Ab \cdot h$$

$$v = (40\text{m}^2)(2.5\text{m})$$

$$v = \underline{100\text{m}^3}$$



11) Obtén el volumen de una pirámide de 9 cm de altura cuya base es un rectángulo de 4 cm de largo y 2.5 cm de ancho.

área de la base

volumen de pirámide

$$ab = L \times a$$

$$ab = (4\text{cm})(2.5\text{cm})$$

$$ab = 10\text{cm}^2$$

$$v = \frac{ab \cdot h}{3}$$

$$v = \frac{(10\text{cm}^2)(9\text{cm})}{3} = \underline{30\text{cm}^3}$$

12) Halla el volumen de un prisma cuya altura mide 5 metros y la base es un rombo cuyas diagonales miden 6 metros y 8 metros respectivamente.

Área de la base

volumen prisma

$$ab = \frac{D \times d}{2}$$

$$ab = \frac{(8\text{m})(6\text{m})}{2} = 24\text{m}^2$$

$$v = ab \cdot h$$

$$v = (24\text{m}^2)(5\text{m})$$

$$v = \underline{120\text{m}^3}$$

13) Calcula el volumen de un prisma pentagonal de 27 metros cuadrados de área de la base y 72 metros de altura.

volumen prisma

$$v = ab \cdot h$$

$$v = (27\text{m}^2)(72\text{m})$$

$$v = \underline{1944\text{m}^3}$$

14) Halla el volumen en m³ de un prisma triangular que tiene de base un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 metros y la altura es de 6 m.

volumen del prisma

$$v = \frac{b \cdot h}{2} \cdot a$$

$$v = \frac{(3\text{m})(4\text{m})}{2} \cdot 6\text{m} = \underline{36\text{m}^3}$$

15) Calcula el volumen de un prisma triangular que tiene 54 mm² de área de su base y de altura 15 mm.

volumen prisma

$$v = ab \cdot h$$

$$v = (54\text{mm}^2)(15\text{mm})$$

$$v = \underline{810\text{mm}^3}$$



16) Calcula el volumen de un cubo de arista 12 cm.

$$\begin{aligned} V &= \ell^3 \\ V &= (12\text{cm})^3 \\ V &= \underline{1728\text{cm}^3} \end{aligned}$$

17) En el museo de Louvre, en París, se construyó una pirámide de vidrio en el año 1989. Ésta tiene una altura de 22 m y la base tiene forma de un cuadrado de 30 m de largo. Calcula el volumen de la pirámide.

Área de la base	volumen de pirámide
$ab = \ell^2$	$v = \frac{ab \cdot h}{3}$
$ab = (30\text{m})^2$	
$ab = 900\text{m}^2$	$v = \frac{(900\text{m}^2)(22\text{m})}{3} = \underline{6600\text{m}^3}$

18) El volumen de un prisma cuadrangular de altura 16 cm es 2 304 cm³. ¿Cuál es la medida del lado de la base?


$$\begin{aligned} ab &= \frac{v}{h} & \ell &= \sqrt{144\text{cm}^2} \\ ab &= \frac{2304\text{cm}^3}{16\text{cm}} = 144\text{cm}^2 & \ell &= \underline{12\text{cm}} \end{aligned}$$

Subraya la respuesta de cada problema

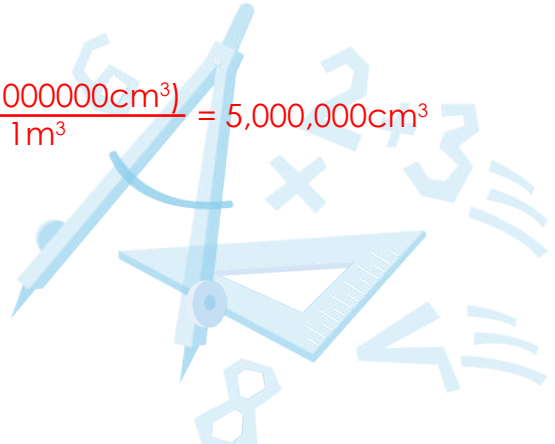
1. Una piscina con forma de prisma de base rectangular de 10 m de largo, 6 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

a) 120 litros	$V = h \cdot a \cdot b$	$1\text{m}^3 \text{ — } 1000\text{L}$	$x = \frac{(120\text{m}^3)(1000\text{L})}{1\text{m}^3} = 120,000\text{L}$
b) 60,000 litros	$V = (10\text{m})(6\text{m})(2\text{m})$	$120\text{m}^3 \text{ — } x$	
c) 40,000 litros	$V = 120\text{m}^3$		
d) <u>120,000 litros</u>			

2. El volumen de la pecera es de:

a) 18,000 cm ³		$V = h \cdot a \cdot b$
b) <u>36,000 cm³</u>		$V = (30\text{cm})(60\text{cm})(20\text{cm})$
c) 12,000 cm ³		$V = 36,000\text{cm}^3$
d) 48,000 cm ³		

3. ¿Cuál es el valor equivalente al volumen 5 m³?

a) <u>5 000 000 cm³</u>		$1\text{m}^3 \text{ — } 1,000,000\text{cm}^3$	$x = \frac{(5\text{m}^3)(1000000\text{cm}^3)}{1\text{m}^3} = 5,000,000\text{cm}^3$
b) 5 600 000 cm ³		$5\text{m}^3 \text{ — } x$	
c) 6 400 000 cm ³			
d) 2 500 000 cm ³			

4. Un envase con forma de prisma triangular tiene como base un triángulo rectángulo de catetos iguales de 4 cm, y altura 12 cm, ¿cuál es su volumen?

a) **96 cm³**

b) 192 cm³

c) 256 cm³

d) 64 cm³

$$ab = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(4\text{cm})(4\text{cm})}{2} = 8\text{cm}^2$$

$$V = ab \cdot h$$

$$V = (8\text{cm}^2)(12\text{cm})$$

$$V = 96\text{cm}^3$$

5. Una pirámide tiene de altura 12 m. Si la base de la pirámide es un cuadrado de lado 3 m, ¿cuál es su volumen?

a) 54 cm³

b) 108 cm³

c) **36 cm³**

d) 144 cm³

$$ab = \ell^2$$

$$ab = (3\text{m})^2$$

$$ab = 9\text{m}^2$$

$$v = \frac{ab \cdot h}{3}$$

$$v = \frac{(9\text{m}^2)(12\text{m})}{3} = 36\text{m}^3$$

6. El volumen de un prisma rectangular cuyas medidas son 2 cm de ancho, 5 cm de largo y 4 cm de altura es:

a) 20 cm³

b) **40 cm³**

c) 10 cm³

d) 7 cm³

$$V = h \cdot a \cdot b$$

$$V = (2\text{cm})(5\text{cm})(4\text{cm})$$

$$V = 40\text{cm}^3$$

7. El volumen de un cubo de dos metros de lado es:

a) **8 m³**

b) 6 m³

c) 6 m²

d) 8 m²

$$v = \ell^3$$

$$v = (2\text{m})^3$$

$$v = 8\text{m}^3$$

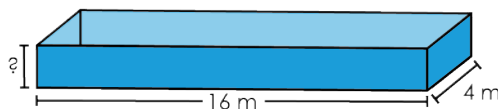
8. La siguiente figura muestra las dimensiones de la base rectangular de una alberca con una capacidad para 128 m³ de agua. ¿Cuál es la profundidad de la alberca?

a) 8 m

b) 4 m

c) **2 m**

d) 1 m



$$V = h \cdot a \cdot b$$

$$h = \frac{V}{a \cdot b}$$

$$h = \frac{128\text{m}^3}{(4\text{m})(16\text{m})} = 2\text{m}$$

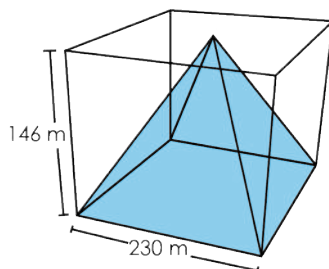
9. Si pudiéramos colocar a la gran pirámide de Egipto dentro de un contenedor, éste sería un prisma cuadrangular con las siguientes dimensiones: ¿Cuál es el volumen de la gran pirámide?

a) 7,723,400.00 m³

b) 3,861,700.00 m³

c) **2,574,466.66 m³**

d) 1,287,233.33 m³



$$ab = \ell^2$$

$$ab = (230\text{m})^2$$

$$ab = 52,900\text{m}^2$$

$$v = \frac{ab \cdot h}{3}$$

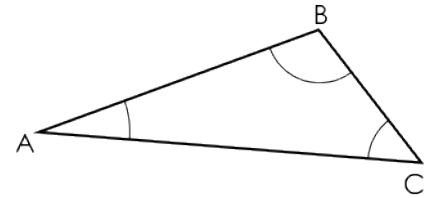
$$v = \frac{(52900\text{m}^2)(146\text{m})}{3}$$

$$v = 2,574,466.66\text{m}^3$$

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO

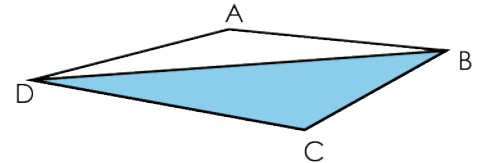
Como sabes, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Un cuadrilátero, puede descomponerse en dos triángulos. La suma de sus ángulos interiores es:

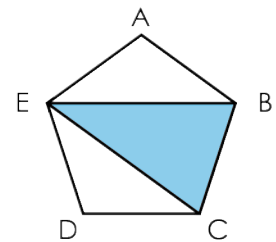
$$180^\circ (2) = 360^\circ$$



De forma similar un pentágono se descompone en tres triángulos.

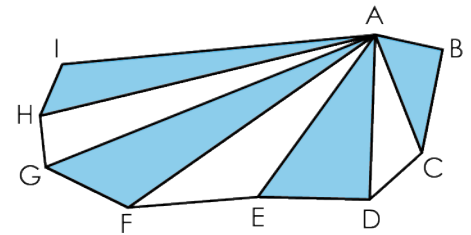
La suma de sus ángulos interiores es:

$$180^\circ (3) = 540^\circ.$$



El polígono tiene 9 lados

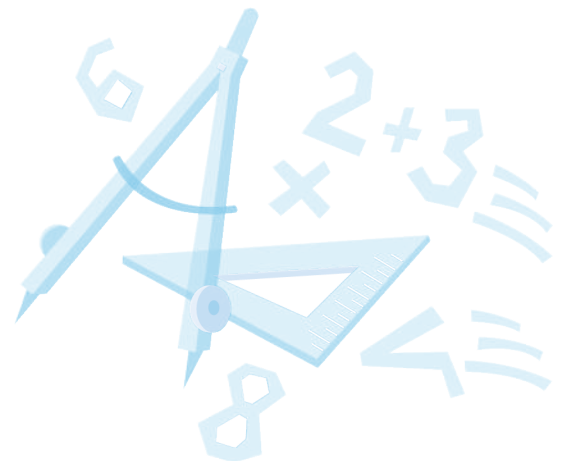
$$180^\circ (7) = 1\ 260^\circ$$



Un polígono de **n** lados puede triangularse, **(n – 2)** triángulos.
Por tanto:












$$\text{La suma ángulos interiores} = 180^\circ (n - 2)$$

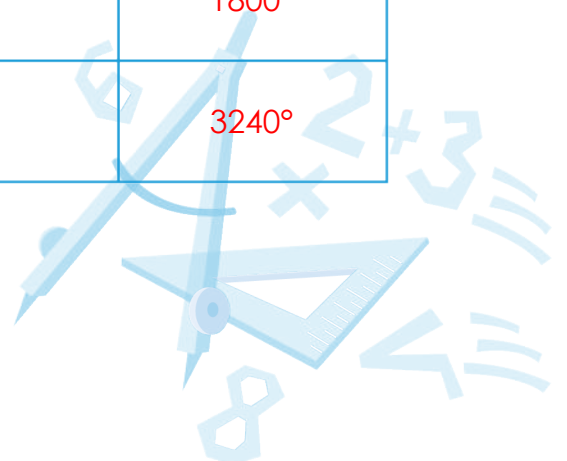
Donde n es el número de lados



Ejercicio:

Contesta las siguientes preguntas sobre los ángulos internos de distintos polígonos convexos.

Polígono	Figura	Número de lados del polígono	Número de triángulos en los que quedó dividido	Suma de los ángulos internos del polígono
Triángulo		3	1	180°
Cuadrilátero		4	2	360°
Pentágono		5	3	540°
Hexágono		6	4	720°
Heptágono		7	5	900°
Octágono		8	6	1080°
Eneágono		9	7	1260°
Decágono		10	8	1440°
Endecágono		11	9	1620°
Dodecágono		12	10	1800°
Icoságono		20	18	3240°

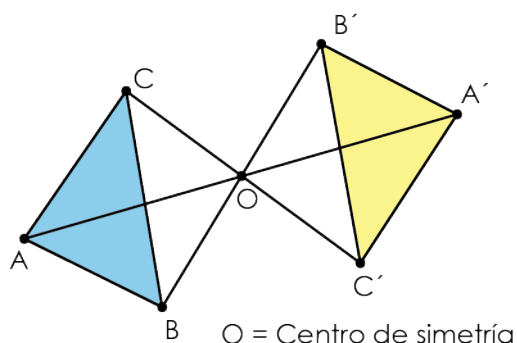


SIMETRÍA

Dos figuras pueden ser simétricas con respecto a un punto (simetría central) o con respecto a una recta (simetría axial).

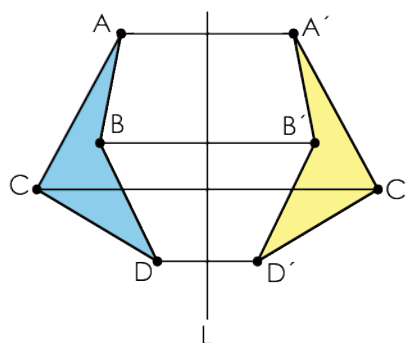
Simetría central

Una simetría central, es un movimiento del plano con el que a cada punto P le corresponde otro punto P' , siendo O el punto medio del segmento PP' , y la distancia de los puntos simétricos al centro de la simetría es la misma, y ambos están alineados con este centro.



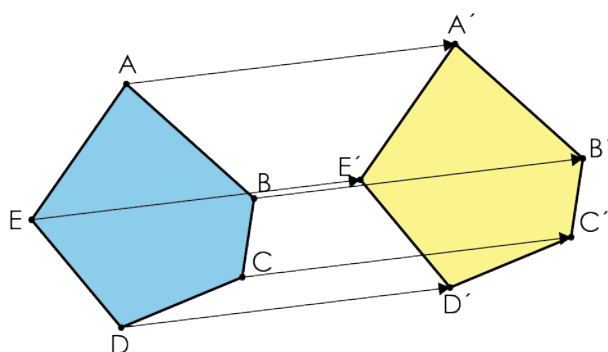
Simetría axial

La simetría axial de eje es un movimiento que conserva la forma y el tamaño de las figuras, pero cambia el sentido. Es un movimiento inverso, por tanto, a todo punto P del plano le corresponde otro punto P' también del plano, de manera que el eje sea la mediatriz del segmento AA' .



Traslación

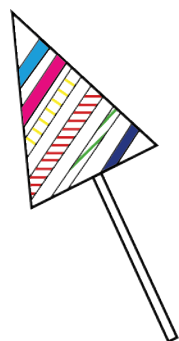
La traslación es un movimiento en el plano consistente en desplazar cada punto de una figura según una dirección, sentido y distancia fija dados. Estos tres datos conforman el denominado vector de la traslación. Este movimiento conserva la forma, el tamaño y el sentido de las figuras.



Las figuras inicial y final guardan relación de igualdad.

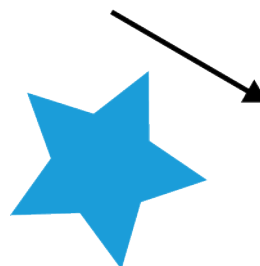
Ejercicio:

Rotación de 180° con respecto al punto C

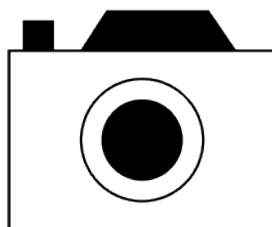


C •

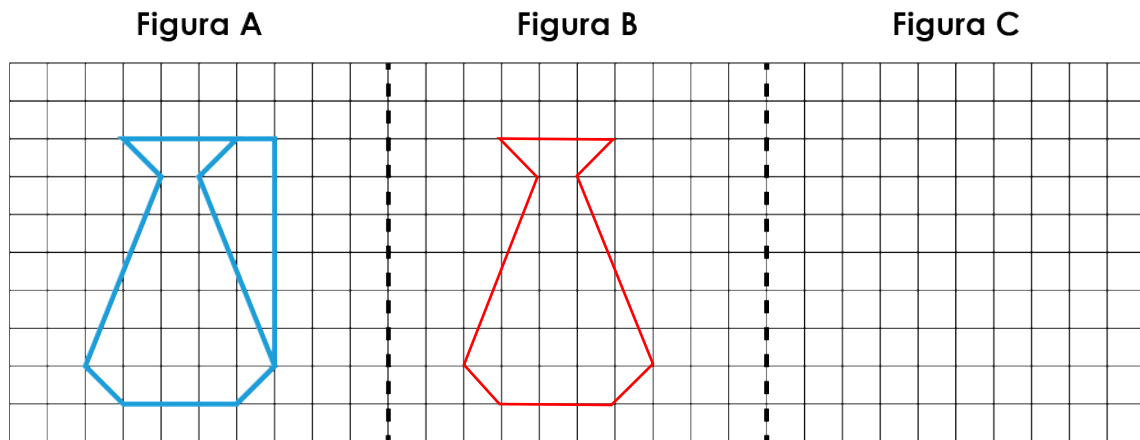
Traslación



Simetría respecto a la recta



Observa el dibujo.



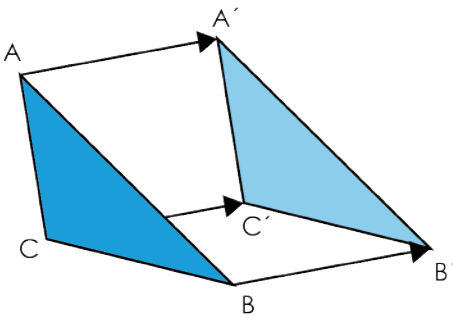
a) Dibuja la figura B simétrica a la A.

b) Dibuja la figura C simétrica a la figura C.

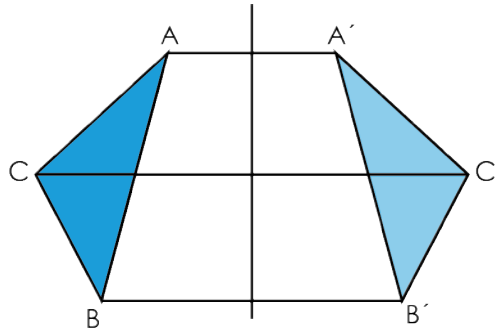
c) ¿Son simétricas las figuras A y C? Si

d) ¿Cómo puedes obtener la figura C a partir de la A? Con el mismo procedimiento que el inciso a

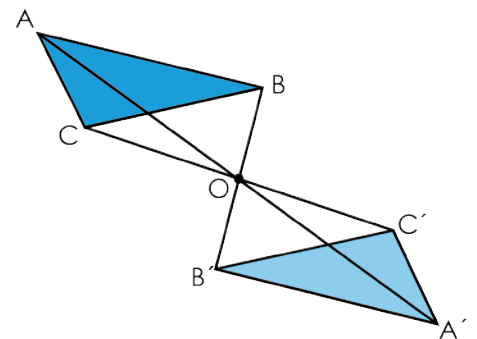
Di que tipo de simetría se aplicó en cada caso.



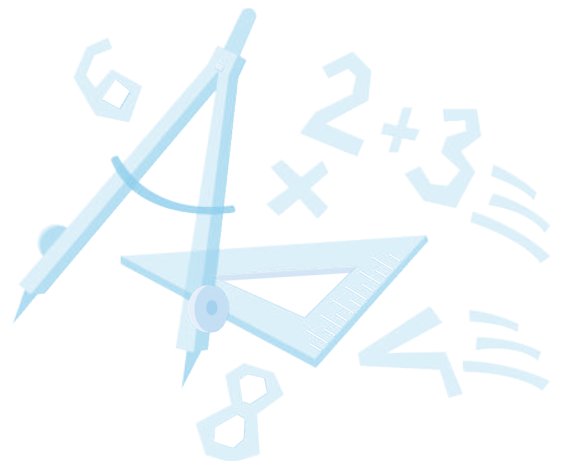
Traslación



Simetría axial



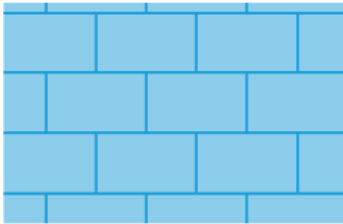
Simetría



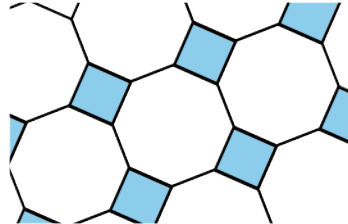
TESELACIONES

Una **teselación** es cuando cubres una superficie con un patrón de formas planas de manera que no se superponen ni hay huecos.

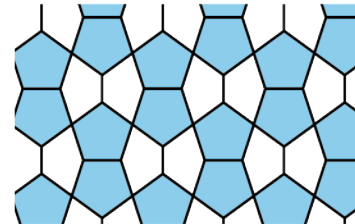
Ejemplos:



Rectángulo



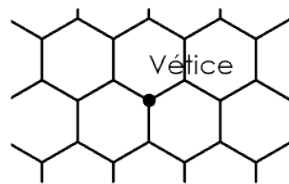
Octágonos y cuadrados



Pentágonos

Teselaciones regulares

Una **teselación regular** es aquella que se construye usando un polígono regular. Fíjate en un vértice...

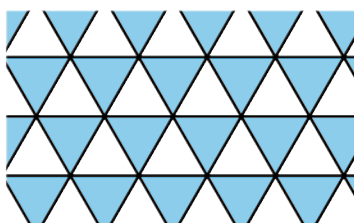


La unión en cada vértice de los ángulos interiores de los polígonos **debe sumar 360°** para que no queden espacios, los únicos polígonos regulares que cumplen tal condición son: triángulo equilátero, cuadrado y el hexágono regular.

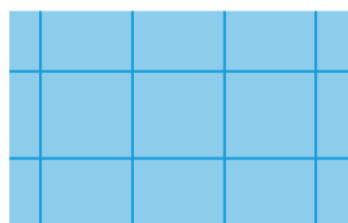
La medida de los ángulos interiores, de estos polígonos, es divisor de 360°.

La cantidad mínima de polígonos que concurren en un vértice es tres, por lo que resulta imposible que un polígono regular de más de seis lados pueda teselar el plano. En estos casos, la medida del ángulo interior es mayor que 120° y la suma de tres de estos ángulos sobrepasa los 360°.

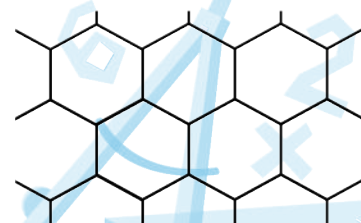
Sólo existen 3 teselaciones regulares:



Triángulos



Cuadrados



Hexágonos

Teselación Semirregular

Una **Teselación Semirregular** es aquella que se construye usando dos o más polígonos regulares. En ella podemos observar que la medida de los lados de los distintos polígonos utilizados es la misma.

Para construir estas teselaciones debemos preocuparnos de que la suma de los ángulos interiores que concurren en un mismo vértice sea 360° . Por lo que no se puede construir este tipo de teselaciones con cualquier combinación de polígonos regulares.

Sólo existen 8 combinaciones de polígono regulares para formar teselaciones semirregulares, con idéntica configuración de polígonos en cada vértice.

Ejercicio 1

¿Construye una teselación, diseñando un mosaico “Original y Creativo”?

Ejercicio 2

Contesta lo que se te pide

¿Qué es una teselación regular? Es cuando se construye usando solo polígonos regulares

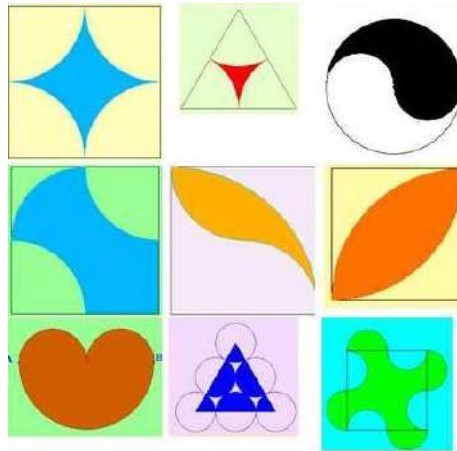
¿Cuánto suman los ángulos de cada vértice de una teselación? 360°

¿Qué es una teselación semirregular? Es cuando se construye usando 2 o más polígonos regulares



ÁREAS DE FIGURAS COMPUESTAS

El cálculo de áreas de figuras geométricas se hace útil cuando debemos determinar el área de una región no convencional; es decir, regiones cuya forma no es geométrica tradicional como los cuadriláteros, triángulos, círculos y polígonos en general.



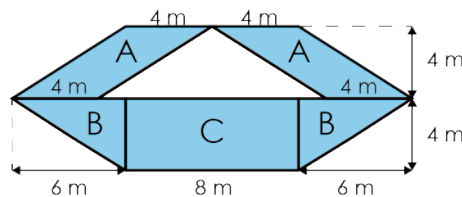
El área de figuras sombreadas de regiones compuestas se resuelve, la mayoría de ellos, a través de dos principios:

Principio de Suma y Resta.

El postulado de adición de áreas. Si una región poligonal es la unión de “**n**” regiones poligonales; su área es la suma de las **n** regiones.

Ejemplo:

Halla el área de la figura sombreada:



Tenemos:

2 paralelogramos cuya área se obtiene $2(bh) = 2(4 \cdot 4 \text{ m}) = 2(16) = 32 \text{ cm}^2$

2 triángulos cuyas áreas se obtienen $2\left(\frac{bh}{2}\right) = 2\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) = 24 \text{ m}^2$

1 rectángulo cuya área se obtiene $bh = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$

Área pedida $32 + 24 + 32 = 88$

Área sombreada = 88 cm²

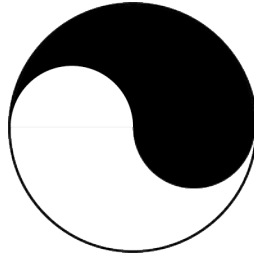


PRINCIPIO DE TRASLACIÓN

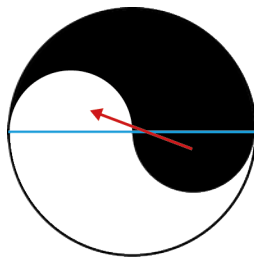
Consiste en juntar pequeñas áreas para formar áreas conocidas.

Ejemplo:

Halla el área de la figura sombreada, si el radio del círculo mayor es igual a 8 cm.



Se puede observar que dentro del círculo mayor hay dos semicírculos, el sombreado completa el vacío que está en la parte superior, por lo tanto, el área del área sombreada es.



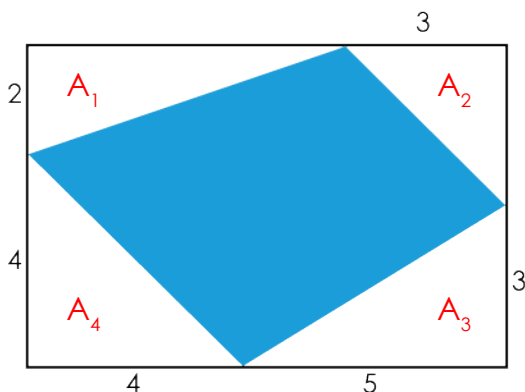
El área sombreada se obtiene con $\frac{1}{2}$ del área del círculo.

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{3.14(8)^2}{2} = \frac{3.14(64)}{2} = 100.48$$

Área sombreada 100.48 cm²

Ejercicios:

1. Determina el área de la región sombreada.



$$A_1 = \frac{(6)(2)}{2} = 6U^2$$

$$A_2 = \frac{(3)(3)}{2} = 4.5U^2$$

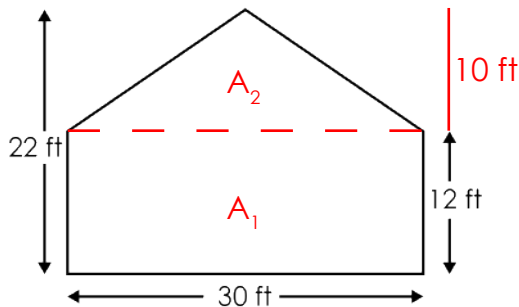
$$A_3 = \frac{(5)(3)}{2} = 7.5U^2$$

$$A_4 = \frac{(4)(4)}{2} = 8U^2$$

$$\begin{array}{r} 6.0U^2 \\ + 4.5U^2 \\ + 7.5U^2 \\ + 8.0U^2 \\ \hline 26.0U^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} A_T = (9)(6) = 54U^2 \\ - 54U^2 \\ + 26U^2 \\ \hline 28U^2 \end{array}$$

área sombreada = 28U²

2. Esta figura muestra la parte trasera de una bodega. Un pintor necesita saber su área para calcular cuanta pintura necesita.



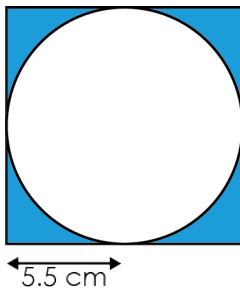
$$A_1 = 30 \text{ ft} (12 \text{ ft})$$

$$A_1 = 3360 \text{ ft}^2$$

$$A_2 = \frac{(30)(10)}{2} = 150 \text{ ft}^2$$

$$A_1 + A_2 = 510 \text{ ft}^2$$

3. Se dispone de una hoja de uncel, como se muestra en la figura, a la cual se le pretende dar una forma circular para que sirva de tapa de un recipiente que tiene forma cilíndrica.



$A_1 = \text{Cuadrado}$

$$A_1 = \ell^2$$

$$A_1 = (11 \text{ cm})^2$$

$$A_1 = 121 \text{ cm}^2$$

$A_2 = \text{Circulo}$

$$A_2 = \pi(r)^2$$

$$A_2 = 3.14(5.5 \text{ cm})^2$$

$$A_2 = 3.14(30.25 \text{ cm}^2)$$

$$A_2 = 94.985 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 121 \text{ cm}^2 - 94.985 \text{ cm}^2$$

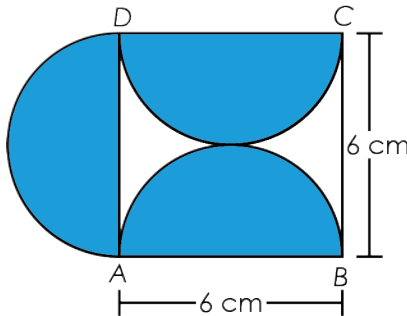
$$A_s = 26.015 \text{ cm}^2$$

a) ¿Qué área de la hoja de uncel se va a usar? $R = 94.985 \text{ cm}^2$

b) ¿Cuál es el área de la hoja de uncel que no se va a utilizar? $R = 26.015 \text{ cm}^2$

4. El área de las siguientes figuras son:

a)



son 3 semicirculos con $r = 3 \text{ cm}$

$$A_c = \pi(r)^2$$

$$A_c = 3.14(3 \text{ cm})^2$$

$$A_c = 3.14(9 \text{ cm}^2)$$

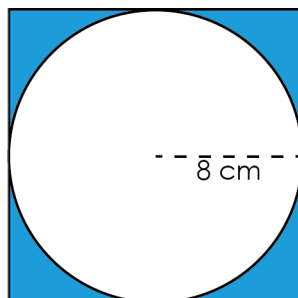
$$A_c = 28.26 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 28.26 \text{ cm}^2 + 14.13 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 42.39 \text{ cm}^2$$

$$A_{\frac{1}{2}c} = \frac{28.26 \text{ cm}^2}{2} = 14.13 \text{ cm}^2$$

b)



$A_1 = \text{área cuadrado}$

$$A_1 = \ell^2$$

$$A_1 = (16 \text{ cm})^2$$

$$A_1 = 256 \text{ cm}^2$$

$A_2 = \text{área circulo}$

$$A_2 = \pi(r)^2$$

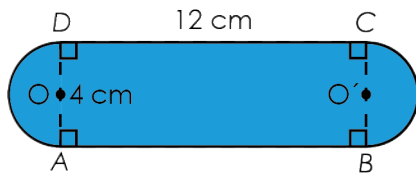
$$A_2 = 3.14(8 \text{ cm})^2$$

$$A_2 = 200.96 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 256 \text{ cm}^2 - 200.96 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 55.04 \text{ cm}^2$$

c)

 $A_1 = \text{área rectángulo}$ $A_2 = \text{área círculo}$

$$A_1 = a \cdot b$$

$$A_2 = \pi(r)^2$$

$$A_1 = (12\text{cm})(4\text{cm})$$

$$A_2 = 3.14(2\text{cm})^2$$

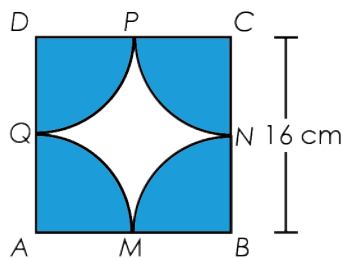
$$A_1 = 48\text{cm}^2$$

$$A_2 = 12.56\text{cm}^2$$

$$A_T = 48\text{cm}^2 + 12.56\text{cm}^2$$

$$A_T = \underline{60.56\text{cm}^2}$$

d)

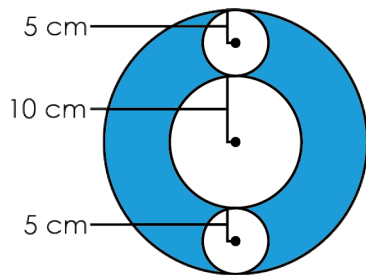
Es un área de círculo completa con $r = 8\text{ cm}$ $A_2 = \text{área círculo}$

$$A_2 = \pi(r)^2$$

$$A_2 = 3.14(8\text{cm})^2$$

$$A_2 = \underline{200.96\text{cm}^2}$$

e)



círculo mayor

círculo medio

círculo chico x 2

$$r = 20\text{ cm}$$

$$r = 10\text{ cm}$$

$$r = 5\text{ cm}$$

$$A = \pi(r)^2$$

$$A = \pi(r)^2$$

$$A = \pi(r)^2$$

$$A = 3.14(20\text{cm})^2$$

$$A = 3.14(10\text{cm})^2$$

$$A = 3.14(5\text{cm})^2$$

$$A = 1256\text{cm}^2$$

$$A = 314\text{cm}^2$$

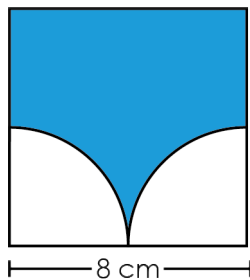
$$A = 78.5\text{cm}^2$$

$$A_{x2} = 157\text{cm}^2$$

$$A_T = \text{CM} - \text{CME} - \text{CCH} \cdot 2$$

$$A_T = \underline{785\text{ cm}^2}$$

f)

 $A_1 = \text{área cuadrado}$ $A_c = \pi(r)^2$

$$A_1 = \ell^2$$

$$A_c = 3.14(4\text{cm})^2$$

$$A_1 = (8\text{cm})^2$$

$$A_c = 3.14(16\text{cm}^2)$$

$$A_1 = 64\text{cm}^2$$

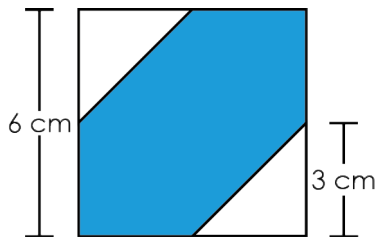
$$A_c = 50.24\text{cm}^2$$

$$A_T = 64\text{cm}^2 - 25.12\text{cm}^2$$

$$A_T = \underline{38.88\text{cm}^2}$$

$$A_{1/2c} = \frac{50.24\text{cm}^2}{2} = 25.12\text{cm}^2$$

g)

 $A_1 = \text{área cuadrado}$ área 2 triángulos

$$A_1 = \ell^2$$

$$A = \frac{(3)(3)}{2} = 4.5\text{cm}^2$$

$$A_T = 36\text{cm}^2 - 9\text{cm}^2$$

$$A_1 = (6\text{cm})^2$$

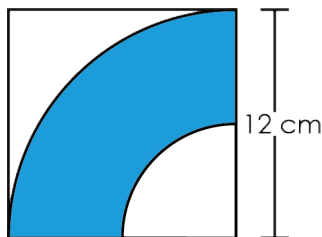
$$A_T = \underline{27\text{cm}^2}$$

$$A_1 = 36\text{cm}^2$$

$$A = (4.5\text{cm}^2)(2)$$

$$A = 9\text{cm}^2$$

h)

Círculo 1 $r = 12\text{ cm}$ Círculo 2 $r = 6\text{ cm}$

$$A_1 = \pi(r)^2$$

$$A_2 = \pi(r)^2$$

$$A_1 = 3.14(12\text{cm})^2$$

$$A_2 = 3.14(6\text{cm})^2$$

$$A_1 = 452.16\text{cm}^2$$

$$A_2 = 113.04\text{cm}^2$$

$$A_T = 113.04\text{cm}^2 - 28.26\text{cm}^2$$

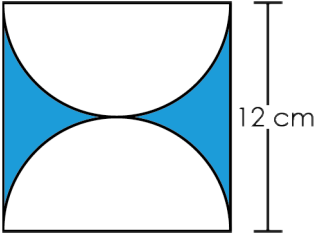
$$A_{1/41} = \frac{452.16\text{cm}^2}{4}$$

$$A_{1/42} = \frac{113.04\text{cm}^2}{4}$$

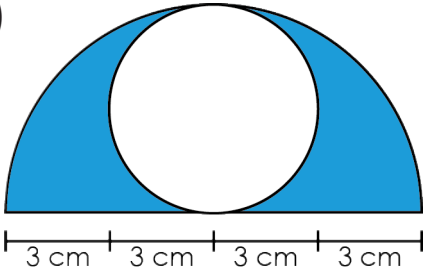
$$A_T = \underline{84.78\text{cm}^2}$$

$$A_{1/41} = 113.04\text{cm}^2$$

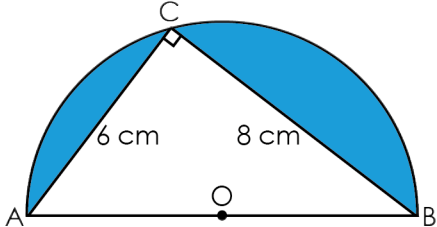
$$= 28.26\text{cm}^2$$

i)  12 cm

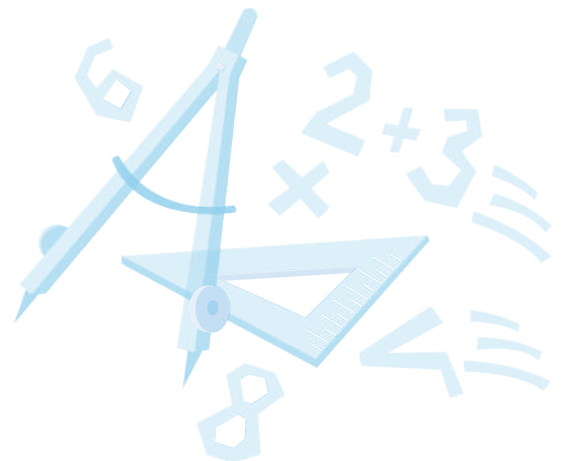
$A_1 = \text{área cuadrado}$ $A_c = \pi(r)^2$
 $A_1 = \ell^2$ $A_c = 3.14(6\text{cm})^2$ $A_T = 144\text{cm}^2 - 113.04\text{cm}^2$
 $A_1 = (12\text{cm})^2$ $A_c = 113.04\text{cm}^2$ $A_T = \underline{30.96\text{cm}^2}$
 $A_1 = 144\text{cm}^2$

j)  3 cm 3 cm 3 cm 3 cm

Círculo mitad $r = 6\text{ cm}$ Círculo completo $r = 3\text{ cm}$
 $A_1 = \pi(r)^2$ $A_2 = \pi(r)^2$
 $A_1 = 3.14(6\text{cm})^2$ $A_2 = 3.14(3\text{cm})^2$
 $A_1 = 113.04\text{cm}^2$ $A_2 = 28.26\text{cm}^2$
 $A_{\frac{1}{2}1} = \frac{113.04\text{cm}^2}{2}$ $A_2 = 28.26\text{cm}^2$
 $A_{\frac{1}{2}1} = 56.52\text{cm}^2$ $A_T = 56.52\text{cm}^2 - 28.26\text{cm}^2$
 $A_T = \underline{28.26\text{cm}^2}$

k)  6 cm 8 cm O

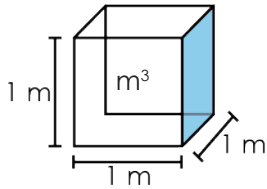
$AB = \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$ Círculo mitad $r = 5\text{ cm}$ Área triángulo
 $AB = \sqrt{64 + 36}$ $A_1 = \pi(r)^2$ $A_2 = \frac{(6\text{cm})(8\text{cm})}{2}$
 $AB = \sqrt{100}$ $A_1 = 3.14(5\text{cm})^2$ $A_2 = 24\text{cm}^2$
 $AB = 10$ $A_1 = 78.5\text{cm}^2$ $A_2 = \underline{24\text{cm}^2}$
 $A_{\frac{1}{2}1} = \frac{78.5\text{cm}^2}{2}$
 $A_{\frac{1}{2}1} = 39.25\text{cm}^2$



UNIDADES DE VOLUMEN Y CAPACIDAD

El **volumen** es una magnitud escalar definida como el espacio ocupado por un objeto. Es una función derivada de longitud, ya que se halla multiplicando las tres dimensiones.

La unidad principal es el metro cúbico, que se designa con el símbolo m^3 .



El metro cúbico es el volumen de un cubo que tiene un metro por arista

metro cúbico	m^3	1 m^3
decímetro cúbico	dm^3	0.001 m^3
centímetro cúbico	cm^3	0.000001 m^3
milímetro cúbico	mm^3	0.000000001 m^3

Unidades de Capacidad.

La capacidad es una magnitud que equivale al volumen interior de los cuerpos huecos.

La unidad principal es el litro que se designa con el símbolo ℓ .

La **capacidad** y el **volumen** son términos que se encuentran estrechamente relacionados. Se define la capacidad como **el espacio vacío de alguna cosa que es suficiente para contener a otra u otras cosas**. Se define el volumen como **el espacio que ocupa un cuerpo**. Por lo tanto, entre ambos términos existe una equivalencia que se basa en la relación entre el litro (unidad de capacidad) y el decímetro cúbico (unidad de volumen).

Este hecho puede verificarse experimentalmente de la siguiente manera: si se tiene un recipiente con agua que llegue hasta el borde, y se introduce en él un cubo sólido cuyas aristas midan 1 decímetro (1 dm^3), se derramará 1 litro de agua. De tal forma, se puede afirmarse que:

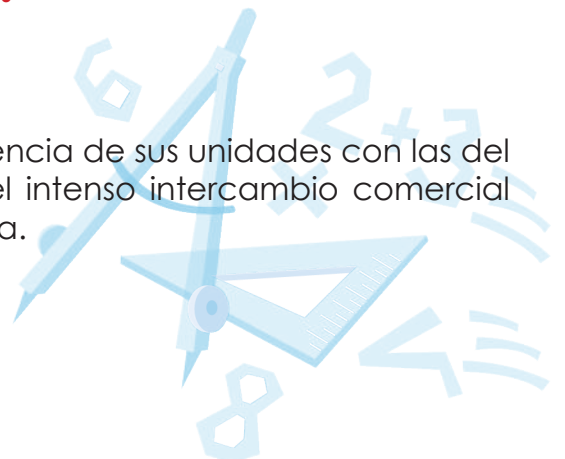
$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$$

Equivalencias

$$1 \text{ dm}^3 = 0.001 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ cm}^3$$

Sistema Inglés de Medidas

El conocimiento del Sistema Inglés de Medidas y la equivalencia de sus unidades con las del Sistema Métrico Decimal tiene especial importancia por el intenso intercambio comercial existente entre México y las naciones que utilizan ese sistema.



Algunas de las unidades del Sistema Inglés de Medidas, y sus equivalencias son las siguientes:

Unidades y equivalencias

No	Unidades	Símbolos	Equivalencias
1	Litro	ℓ	1 000 mℓ = 1 dm ³
2	Botella		0.750 ℓ = 750 mℓ = 750 cm ³
3	Galón americano		3.785 41 ℓ = 3.785 41 dm ³
4	Galón inglés		4.546 09 ℓ = 4 546 09 dm ³
5	Garrafón		5 galones = 25 botellas = 18.75 L
8	Barril para petróleo	bb ℓ	158.987 ℓ = 42 galones
9	Quilate		200 miligramos

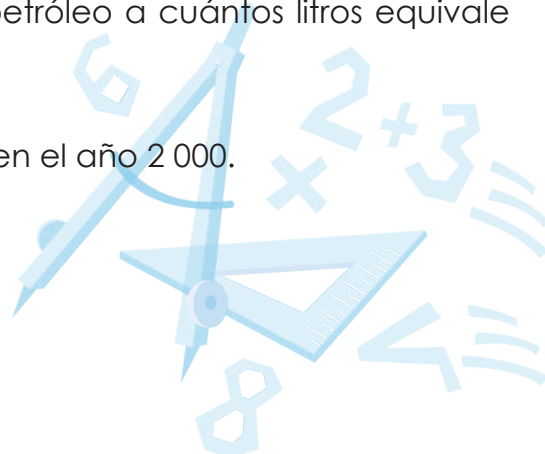
Pesos en General

Medida	Equivalencia	Equivalencia al sistema métrico decimal
1 Tonelada	20 Quilates	920 Kilogramos
1 Quital	4 Arrobas ó 100 Libras	46 Kilogramos
1 Costal	1/2 Carga	Entre 50 y 80 kilogramos
1 Libra	16 Onza, 4 Cuarterones	460 Gramos
1 Onza	16 Adarmes	28.75 Gramos
1 Cuarterón	1/4 de 1 Libra	115 Gramos

Ejemplos:

1. Si se compraron 5 galones americanos de pintura a cuántos litros de pintura equivalen.
2. Si 1 galón americano = 3.785 ℓ entonces $5(3.785) = 18.925$
5 galones americanos equivalen a 18.925 litros de pintura.
3. México exporta en el 2 000 a E.E.U.U. 3 000 barriles de petróleo a cuántos litros equivale dicha exportación.

Si un barril = 158.987 litros entonces $3\ 000 (158.987) = 476\ 961$
En total México exportó 476 961 litros de petróleo a E.E.U.U. en el año 2 000.



Ejercicio:

1. Hacer las siguientes conversiones:

$$2.3 \text{ cm}^3 = \underline{2300} \text{ mm}^3 \quad 3.71 \text{ m}^3 = \underline{3710} \text{ dm}^3 \quad 41\,700 \text{ cm}^3 = \underline{41.7} \text{ dm}^3$$

$$47.7 \text{ l} = \underline{4770} \text{ cl} \quad 3.47 \text{ Hl} = \underline{347} \text{ dm}^3 \quad 35.1 \text{ l} = \underline{0.35} \text{ Hl}$$

$$41.5 \text{ l} = \underline{41.5} \text{ dm}^3 \quad 3.57 \text{ Hl} = \underline{557} \text{ dm}^3 \quad 2.5 \text{ dl} = \underline{250} \text{ cm}^3$$

2. Tengo una cisterna para agua con 3 m^3 . ¿Cuántos litros se almacenan?

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & \text{—} & 1\,000 \text{ l} \\ 3 \text{ m}^3 & \text{—} & ? \end{array} \quad \frac{(3\text{m}^3)(1000\text{l})}{1 \text{ m}^3} = \underline{3000\text{l}}$$

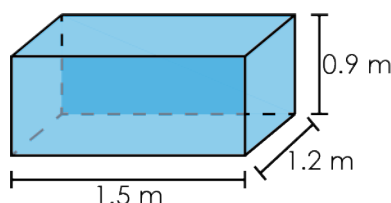
3. ¿Qué volumen, en m^3 , ocupan 200 litros?

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & \text{—} & 1\,000 \text{ l} \\ ? & \text{—} & 200 \text{ l} \end{array} \quad \frac{(1\text{m}^3)(200\text{l})}{1000\text{l}} = \underline{0.2\text{m}^3}$$

4. Una cubeta de pintura tiene 5 galones americanos, ¿a cuántos litros equivalen?

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ galones} & \text{—} & 3.78541 \text{ l} \\ 5 \text{ galones} & \text{—} & ? \end{array} \quad \frac{(5)(3.78541\text{l})}{1} = \underline{18.92705 \text{ l}}$$

5. ¿Cuántos litros caben en una cisterna como la que se presenta en el croquis?



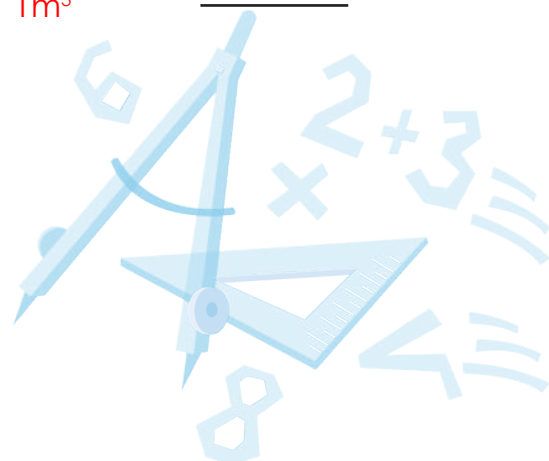
$$\begin{aligned} V &= L \cdot a \cdot h \\ V &= (1.5\text{m})(1.2\text{m})(0.9\text{m}) \\ V &= 1.62\text{m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & \text{—} & 1\,000 \text{ l} \\ 1.62\text{m}^3 & \text{—} & ? \end{array} \quad \frac{(1.62\text{m}^3)(1000\text{l})}{1\text{m}^3} = \underline{1620 \text{ l}}$$

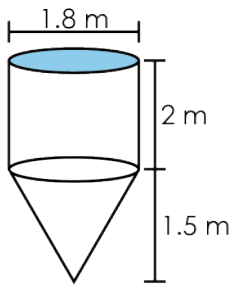
6. Suponga usted que tiene un negocio donde da clases de natación en una alberca que mide 30 m de largo, 20 m de ancho y 1.5 m de profundidad; si uno de los empleados le recomienda vaciar la alberca para limpiarla, ¿cuántos litros tirará de agua, si le hace caso?

$$\begin{aligned} V &= L \cdot a \cdot h \\ V &= (30\text{m})(20\text{m})(1.5\text{m}) \\ V &= 900\text{m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & \text{—} & 1\,000 \text{ l} \\ 900\text{m}^3 & \text{—} & ? \end{array} \quad \frac{(900\text{m}^3)(1000\text{l})}{1\text{m}^3} = \underline{900\,000 \text{ l}}$$



7. ¿Cuántos galones ingleses de agua le caben a un recipiente como el que se muestra en la figura?



V = volumen cilindro

$$r = 0.9 \text{ m}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = (3.14)(0.9\text{m})^2(2\text{m})$$

$$V = 5.0868\text{m}^3$$

V_1 = volumen cono

$$r = 0.9 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_1 = \frac{1}{3}(3.14)(0.9\text{m})^2(1.5\text{m})$$

$$V_1 = 1.2717\text{m}^3$$

V_T = volumen total

$$V_T = V + V_1$$

$$V_T = 5.0868\text{m}^3 + 1.2717\text{m}^3$$

$$V_T = 6.3585 \text{ m}^3$$

$$\frac{1 \text{ m}^3}{6.3585\text{m}^3} \times 219.969\text{gal} = \frac{(6.3585\text{m}^3)(219.969\text{gal})}{1\text{m}^3} = \underline{1\,398.67 \text{ gal}}$$

8. ¿A qué es igual 1 ℓ?

- a) Un decímetro cúbico
- b) Un metro cúbico**
- c) Un centímetro cúbico
- d) Un kilogramo



MEDIA, MEDIANA Y MODA

La estadística puede entenderse como un conjunto de herramientas que involucran el estudio de métodos y procedimientos utilizados para recopilar, clasificar y analizar datos. Las herramientas de estadística también ofrecen los medios necesarios para realizar deducciones científicas a partir del resumen de los datos resultantes.

Comparaciones entre las diferentes medidas.

Las tres medidas de tendencia central, la **media**, **mediana** y **moda**, no son igualmente útiles para obtener una medida de tendencia central. Por el contrario, cada una de estas medidas tiene características que hacen que su empleo sea una ventaja en ciertas condiciones y en otras no.

Para resumir en un conjunto de datos numéricos podemos utilizar la **media aritmética**, la **mediana** o la **moda**. La **media aritmética o promedio** representa el reparto equitativo, el equilibrio, la equidad. Es el valor que tendrían los datos, si todos ellos fueran iguales. O, también, el valor que correspondería a cada uno de los datos de la distribución si su suma total se repartiera por igual. Si se ordenan todos los datos, de menor a mayor, la **mediana** es el valor que ocupa la posición central. Si el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos centrales. La **moda** es el valor que más se repite o, lo que es lo mismo, el que tiene la mayor frecuencia.

El uso de la media aritmética y de la mediana (también llamada promedio) es algo que se usa cotidianamente en nuestra vida.

Media aritmética o promedio

Es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.

Ejemplo:

Las notas de 5 alumnos en una prueba fueron:

Alumnos	Nota
1	6.0
2	5.4
3	3.1
4	7.0
5	6.1



Se suman las notas:

$$6.0 + 5.4 + 3.1 + 7.0 + 6.1 = 27.6$$

El total se divide entre la cantidad de alumnos:

$$x = \frac{27.6}{5} = 5.52$$

La media aritmética en este problema es 5.52

Propiedades de la media aritmética o promedio

1. La media es una medida muy útil para comparar dos o más poblaciones.
2. Su cálculo es muy sencillo y en él intervienen todos los datos.
3. Su valor es único para una serie de datos dados.
4. Se interpreta como “punto de equilibrio” del conjunto de datos, ya que tiene la propiedad de equilibrar los datos respecto de su propio valor:
5. La sumatoria de las desviaciones de cada término respecto de la media es igual a cero.
Comprobemos la anterior propiedad con un caso sencillo. Se tiene que para los datos 5, 7, 9, 11 y 13; la media aritmética es 9.

La sumatoria de las desviaciones de cada término respecto de la media es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (9 - 5) & = & 4 \\ (9 - 7) & = & 2 \\ (9 - 9) & = & 0 \\ (9 - 11) & = & -2 \\ (9 - 13) & = & -4 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

Observa que la sumatoria de las restas de cada término respecto de la media es igual a cero.

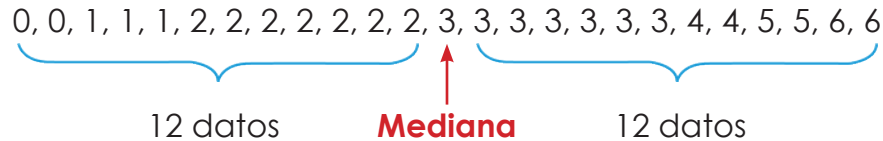


Mediana

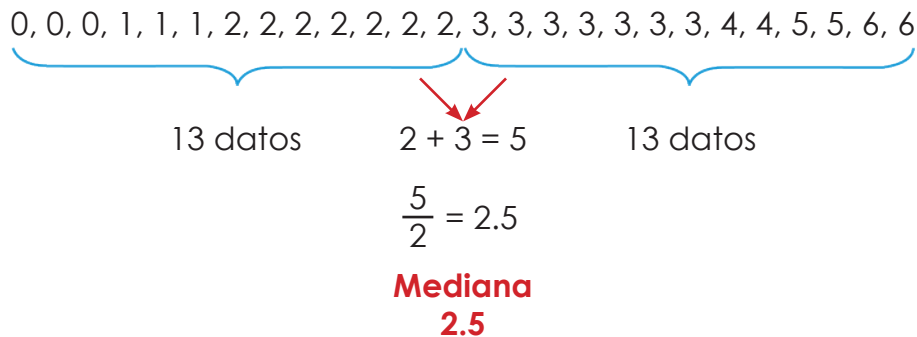
Es el punto medio de los valores después de ordenarlos de menor a mayor, o de mayor a menor. Se tiene que 50% de las observaciones se encuentran por arriba de la mediana y 50% por debajo de ella.

Ejemplo:

Número de datos nones



Número de datos pares



Las propiedades de la mediana

1. Es única, sólo existe una mediana para un conjunto de datos.
2. No se ve afectada por valores muy grandes o muy pequeños.
3. Puede calcularse para una distribución de frecuencias en los datos.

Moda

Es el valor que aparece con más frecuencia.

Puede determinarse para todos los niveles de datos. No se ve afectada por valores muy altos o muy bajos.

Para muchos conjuntos de datos no hay valor modal porque ningún valor aparece más de una vez.

Para algunos conjuntos de datos hay más de una moda (bimodal, que tiene dos modas, o polimodal más de dos modas).

2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10

Dato que más se repite
Moda
6

3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10

Dato que más se repite
Moda
4

Dato que más se repite
Moda
9

Bimodal

2, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10

Moda
2

Moda
6

Moda
8

Moda
9

Polimodal

Ejercicio:

1. Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por nueve estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos:

6.2, 6.0, 6.0, 15.3, 6.3, 6.1, 6.23, 6.15, 6.2

¿Cuál es la media, mediana y moda?

$$\begin{array}{r}
 6.2 \\
 6.0 \\
 6.0 \\
 15.3 \\
 6.3 \\
 6.1 \\
 6.23 \\
 6.15 \\
 6.2 \\
 \hline
 64.48
 \end{array}
 \quad
 x = \frac{64.48}{9} = 7.16$$

media = 7.16

6.0, 6.0, 6.1, 6.15, 6.2, 6.2, 6.23, 6.3, 15.3

mediana = 6.2 moda = 6.0 y 6.2

2. La tabla muestra el número de frecuencia de las calificaciones de historia del arte de los 40 alumnos de una clase:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	2	2	4	5	8	9	3	4	3

Halla la media aritmética, la moda y la mediana.

f_i = el número de veces que se repite x_i , entonces: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9

$$x = \frac{212}{40} = 5.3$$

mediana = 5 moda = 6

media = 5.3

3. A tomar una muestra de estaturas en centímetros de 21 estudiantes de secundaria se registraron las siguientes:

155, 158, 160, 157, 155, 160, 162, 161, 160, 160, 160, 165, 163, 168, 163, 162, 160, 164, 161, 163, 160

¿Cuál es la media, mediana y moda?

155, 155, 157, 158, 160, 160, 160, 160, 160, 160, 160, 161, 161, 162, 162, 163, 163, 163, 164, 165, 168

$$x = \frac{3377}{21} = 160.8 \quad \text{mediana} = \underline{160} \quad \text{moda} = \underline{160}$$

$$\text{media} = \underline{160.8}$$

4. En un estudio que se realizó en un asilo de ancianos, se tomó las edades de los que pueden caminar sin dificultades. Buscar la media, la mediana y la moda de las siguientes edades.

69, 73, 65, 70, 71, 74, 65, 69, 60, 62

60, 62, 65, 65, 69, 69, 70, 71, 73, 74

$$x = \frac{678}{10} = 67.8 \quad \text{mediana} = \underline{69} \quad \text{moda} = \underline{65 \text{ y } 69}$$

$$\text{media} = \underline{67.8}$$

5. El director del programa de becas de una secundaria tiene 16 solicitudes para su aprobación el próximo otoño. Las calificaciones de la prueba de los solicitantes son:

27, 27, 27, 28, 27, 25, 25, 28, 26, 28, 26, 28, 31, 20, 26, 26

20, 25, 25, 26, 26, 26, 26, 27, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 28, 31

$$x = \frac{425}{16} = 26.56 \quad \text{mediana} = \underline{27} \quad \text{moda} = \underline{26, 27 \text{ y } 28}$$

$$\text{media} = \underline{26.56}$$



6. Se escogió un salón de clases de cuarto grado, con un total de 25 estudiantes, y se les pidió que calificaran del 1 al 5 un programa televisivo.

5 = Excelente 4 = Bueno 3 = Regular 2 = No muy bueno 1 = Fatal

Estos fueron los resultados:

1, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 2, 5, 1, 4, 5, 1, 5, 3, 5, 1, 4, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 5

Busca la media, la moda y la mediana.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5

$$x = \frac{56}{25} = 2.24 \quad \text{mediana} = \underline{2} \quad \text{moda} = \underline{1}$$

$$\text{media} = \underline{2.24}$$

7. La agencia de viajes Moore, una agencia de viajes nacional, ofrece tarifas especiales en ciertas travesías por el Caribe a ciudadanos de la tercera edad. El presidente de la agencia quiere información adicional sobre las edades de las personas que viajan. Una muestra aleatoria de 40 clientes que hicieron un crucero el año pasado dio a conocer las siguientes edades.

77, 18, 63, 84, 38, 54, 50, 59, 54, 56, 36, 23, 50, 34, 44, 41, 58, 58, 53, 51, 62, 43, 52, 53, 63, 62, 62, 65, 61, 52, 60, 60, 45, 66, 83, 71, 63, 58, 67, 71

Organiza los datos y calcula la media, mediana y moda.

18, 23, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 45, 50, 50, 51, 52, 52, 53, 53, 54, 54, 56, 58, 58, 58, 59, 60, 60, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 65, 66, 67, 71, 71, 77, 83, 84

$$x = \frac{2220}{40} = 55.5 \quad \text{mediana} = \underline{58} \quad \text{moda} = \underline{58, 62 \text{ y } 63}$$

$$\text{media} = \underline{55.5}$$

8. Las puntuaciones obtenidas por un grupo en una prueba han sido:

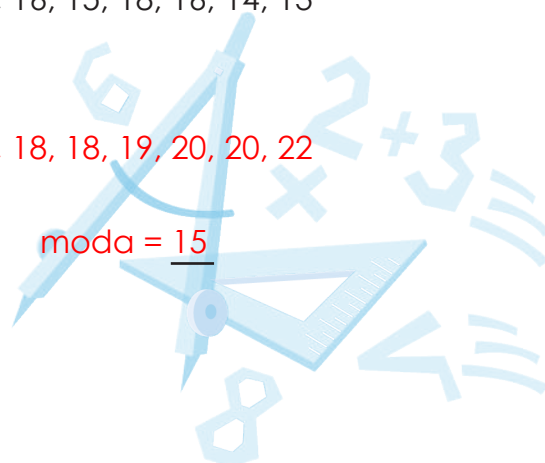
15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13

Organiza los datos y calcula la media, mediana y moda.

13, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 22

$$x = \frac{327}{20} = 16.35 \quad \text{mediana} = \underline{16} \quad \text{moda} = \underline{15}$$

$$\text{media} = \underline{16.35}$$



9. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1

Organiza los datos y calcula la media, mediana y moda.

[illegible]

$x = \frac{88}{38} = 2.31$ mediana = 3 moda = 3
 media = 2.31

10. Las calificaciones de 50 alumnos en Matemáticas han sido las siguientes:

5, 2, 4, 9, 7, 4, 5, 6, 5, 7, 7, 5, 5, 2, 10, 5, 6, 5, 4, 5, 8, 8, 4, 0, 8, 4, 8, 6, 6, 3, 6, 7, 6, 6, 7, 6, 7, 3, 5, 6, 9, 6, 1, 4, 6, 3, 5, 5, 6, 7

Organiza los datos y calcula la media, mediana y moda

[illegible]

$$x = \frac{274}{50} = 5.48 \quad \text{mediana} = \underline{6} \quad \text{moda} = \underline{6}$$

media = 5.48

En cada caso obtén la moda, mediana y media

1. 1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 8, 8

$$\begin{aligned} M_o &= 1, 3, 4, 6, 8 \\ M_e &= 4 \\ \overline{x} &= 4.4 \end{aligned}$$

2. 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 13, 14, 15, 15, 15, 17, 17, 18

$$\begin{aligned} M_o &= 9, 10, 15 \\ M_e &= 12.5 \\ \overline{x} &= 12.56 \end{aligned}$$

3. 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 8

$$\begin{aligned} M_o &= 5,9 \\ M_e &= 8 \\ \overline{x} &= 7,6 \end{aligned}$$

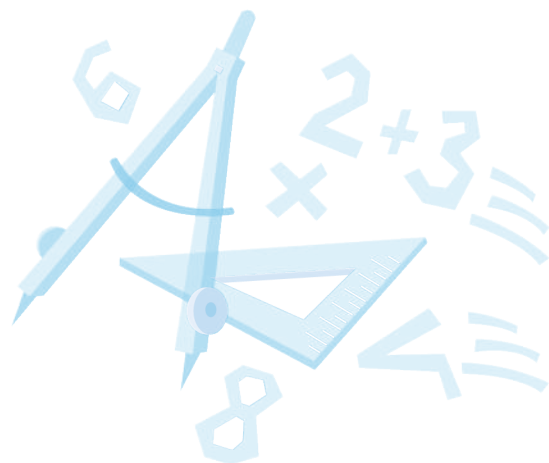


4. 4, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10

$$M_o = 6$$

$$M_e = 7.5$$

$$\overline{x} = 7.6$$



MEDIA PONDERADA

Es la medida en donde se toma en cuenta la importancia de cada uno de sus datos, dándole mayor o menor importancia en el cálculo de la media.

Ejemplo:

En una materia dada se asignan porcentajes de importancia, de la siguiente forma: **Unidad I** (20% del curso), **Unidad II** (25% del curso), **Unidad III** (20% del curso), **Unidad IV** (15% de la calificación), **Unidad V** (20% de la calificación). Si las calificaciones de un alumno son 8 en la primera unidad, 5 en la segunda, 8 en la tercera unidad, 10 en la cuarta unidad y 8 en la última unidad. Es decir, se tienen la siguiente tabla:

Unidad	Ponderación (W_i)	Datos (W_i)
I	20% = 0.2	8
II	25% = 0.25	5
III	20% = 0.2	8
IV	15% = 0.15	10
V	20% = 0.20	8

$$W_i = \frac{8(0.2) + 5(0.25) + 8(0.2) + 10(0.15) + 8(0.20)}{0.2 + 0.25 + 0.2 + 0.15 + 0.20} = \frac{7.55}{1.0} = 7.55$$

Observa que diferencia existe con la media aritmética.

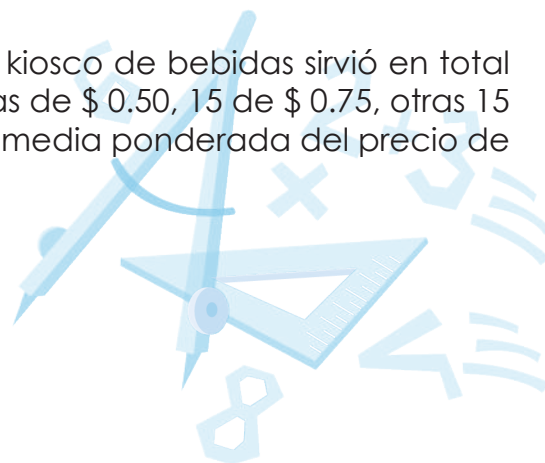
La media para los datos es igual a:

$$\bar{x} = \frac{8 + 5 + 8 + 10 + 8}{5} = \frac{39}{5} = 7.8$$

Cuando se trabaja con la media aritmética simple, se asume que a cada observación se le da la misma importancia. Sin embargo, en ciertos casos se requiere dar mayor peso o importancia a los datos y es cuando se aplica la media ponderada.

Otro ejemplo es:

En tarde calurosa del sábado, Cristian un empleado de un kiosco de bebidas sirvió en total 50 bebidas durante la mañana de ese día. Vendió 5 bebidas de \$ 0.50, 15 de \$ 0.75, otras 15 de \$ 0.90, y otras 15 de \$ 1.10. A continuación se muestra la media ponderada del precio de las bebidas vendidas por Cristian para ese día:



$$W_i = 5(\$ 0.50) + 15(\$ 0.75) + 15(\$ 0.90) + 15(\$ 1.10)$$

$$W_i = 43.75 \div 50$$

$$W_i = \$ 0.875$$

La media ponderada para el precio de las bebidas despachadas por Cristian en su kiosco, con base a los datos del día sábado, fue de \$0.875 por bebida.

Cuando se trabaja con la media aritmética simple, se asume que a cada observación se le da la misma importancia. Sin embargo, en ciertos casos se requiere dar mayor peso o importancia a los datos y es cuando se aplica la media ponderada.

Ejercicio:

1. Carlos obtiene calificaciones parciales de 65, 83, 80, y 90. En el examen final recibe una calificación de 92. Calcula la media ponderada, si cada uno de los exámenes parciales cuenta el 15% y el examen final cuenta 40% de la calificación total.

$$W_i = \frac{65(0.15) + 83(0.15) + 80(0.15) + 90(0.15) + 92(0.4)}{0.15 + 0.15 + 0.15 + 0.15 + 0.40} = \frac{84.5}{1.0} = 84.5$$

2. En junio un inversionista compró 300 acciones de Oracle a un precio de \$ 20 por acción, en agosto compró 400 acciones más a \$ 25 cada una, y en noviembre 400 a \$ 23 por acción. Cuál es el precio medio ponderado por acción.

$$W_i = \frac{300(20) + 400(25) + 400(23)}{300 + 400 + 400} = \frac{25200}{1100} = 22.9$$



GRÁFICAS

Las variaciones existentes entre las magnitudes que intervienen en un fenómeno físico o social, muchas veces se representan por medio de dibujos, que reciben el nombre de gráficas.

Existen diferentes clases de gráficas; gráfica de barras, gráfica poligonal, gráfica de sectores circulares, etc.

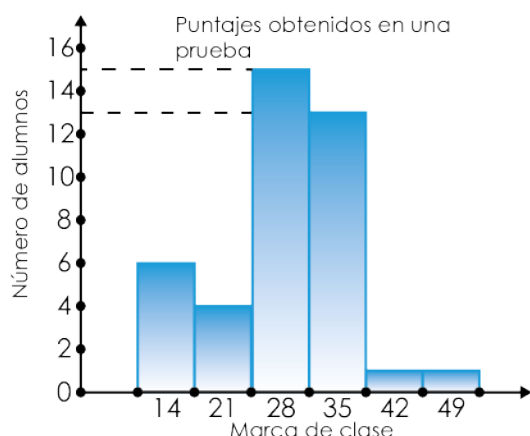
Histograma

La gráfica de barras recibe el nombre de histograma, en esta clase de gráficas se utilizan barras de la misma anchura y cuya altura debe ser proporcional a la cantidad que se va a representar.

En la base del histograma se indica la clase; y en la altura a la frecuencia de clase, esta clase de gráficas nos permiten resumir y analizar grandes cantidades de datos, es una forma de comunicar información de forma clara y sencilla sobre situaciones complejas.

Ejemplo:

En una prueba de conocimientos generales un grupo de 40 alumnos obtuvo los siguientes reactivos correctos.



¿Cuál es el número de alumnos que obtuvieron entre 28 y 35 reactivos correctos?

28 alumnos

¿Cuál es el mayor número de reactivos correctos obtenido?

15 + 13
49 reactivos correctos

Gráfica poligonal:

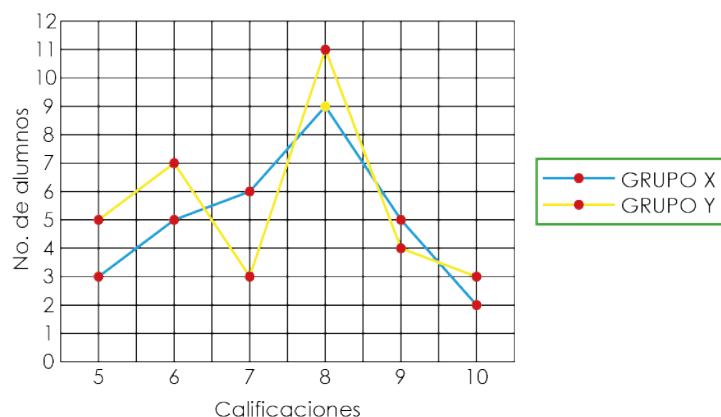
Se utiliza, al igual que el histograma, para representar distribuciones de frecuencias de variables cuantitativas continuas, pero como no se utilizan barras en su confección sino segmentos de recta, de ahí el nombre de polígono.

Las gráficas poligonales se utilizan para mostrar la evolución o los cambios de un fenómeno durante un período; la variación del precio de un artículo, el índice de enfermedades de un país, el crecimiento en estatura de un niño y otros datos semejantes, donde interesa saber cómo cambian en el tiempo.

Habitualmente se usa cuando se quiere mostrar en el mismo gráfico más de una distribución, ya que por la forma de construcción del histograma sólo se puede representar una distribución. Para su confección, una vez construidas y rotuladas las escalas, de manera similar a como se realiza para un histograma, los valores de alturas obtenidos se marcan sobre el punto medio o marca de clase de los intervalos correspondientes y luego se procede a unir esos puntos con segmentos de recta.

Ejemplo:

En la materia de Matemáticas la profesora analiza los resultados de dos grupos.



¿Cuántos alumnos del grupo X obtuvieron más de 8 de calificación?

7 alumnos

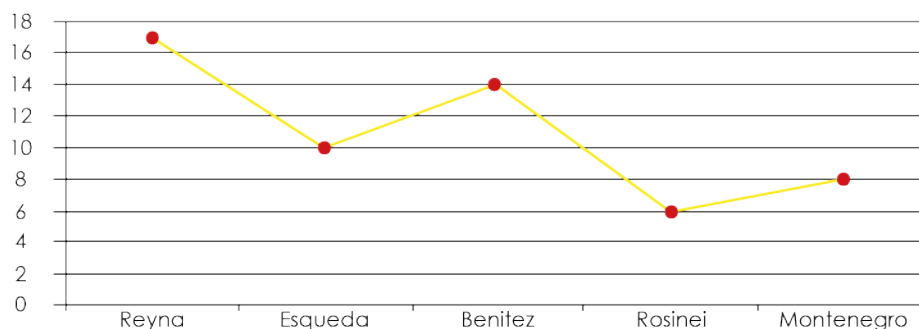
¿En cuál grupo 5 alumnos obtuvieron 5 de calificación?

En el grupo Y

Ejercicio:

Subraya la respuesta

1. La siguiente gráfica representa el número de anotaciones de cinco integrantes del equipo de fútbol América en uno de los últimos torneos:

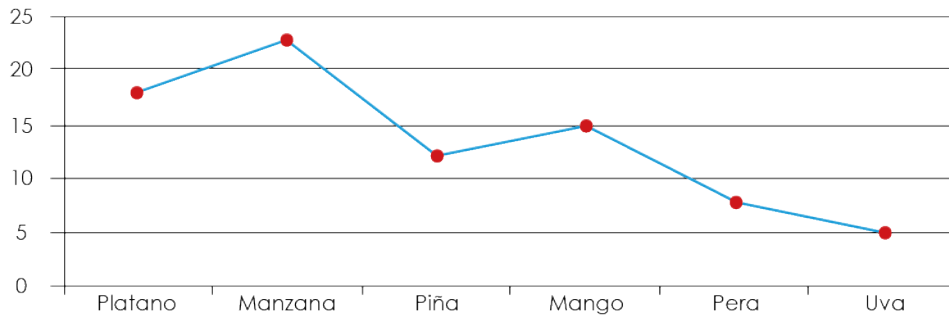


¿Cuántos goles anotaron entre todos?

- a) 55 goles
- b) **56 goles**
- c) 45 goles
- d) 46 goles



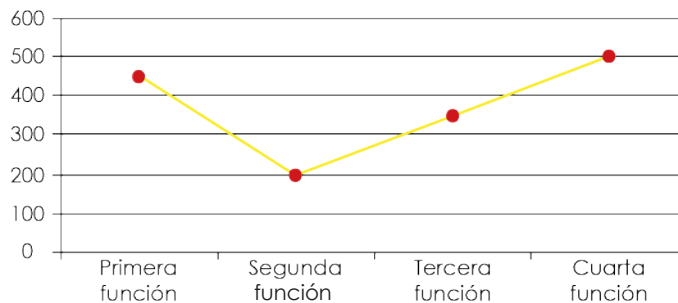
2. Jaime preguntó a sus vecinos: ¿Qué fruta te gusta más? y con las respuestas obtenidas elaboró la siguiente gráfica:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) 20 personas prefieren el mango o la pera.
- b) Manzana y plátano son las frutas preferidas de sus vecinos.
- c) La fruta de mayor preferencia es la uva.
- d) Jaime preguntó a 50 vecinos sobre su fruta preferida.

3. La siguiente gráfica representa la cantidad de bolsas de palomitas que se vendieron en las cuatro funciones realizadas en un cine de la Ciudad de México.

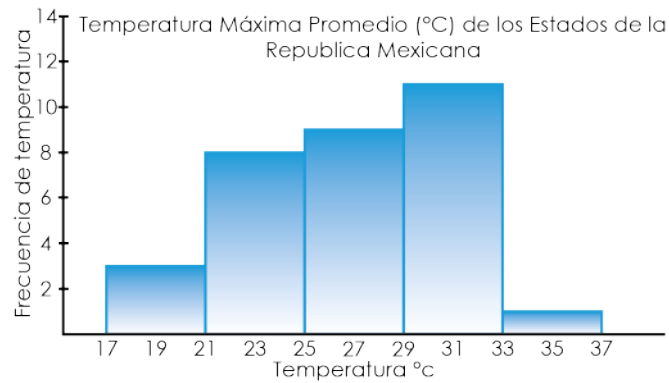


De acuerdo con los datos que se muestran, ¿cuál fue el promedio de bolsas de palomitas vendidas?

- a) 375 personas
- b) 300 personas
- c) 400 personas
- d) 450 personas



4. Observa la información contenida en la siguiente gráfica:

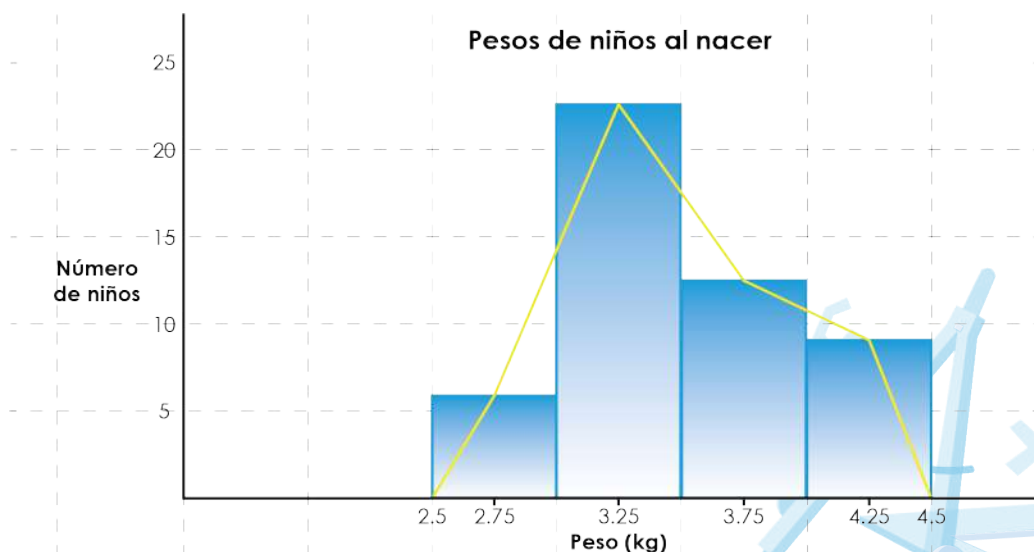


Completa la siguiente tabla; luego responde lo que te pregunta:

Clase	Intervalo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	17 - 21	3	0.09375
2	21 - 25	8	0.25
3	25 - 29	9	0.28125
4	29 - 33	11	0.24375
5	33 - 37	1	0.03125

- a) ¿Cuáles son las temperaturas máximas de los Estados de la República? 33 - 37
- b) ¿Cuál es la temperatura mínima que presentaron los estados? 17 - 21
- c) ¿Cuál es la media de las temperaturas que presentaron los estados? 25 - 29

5. En una investigación sobre el peso de un cierto número de niños recién nacidos, se obtuvieron los siguientes datos:



Determinen cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- a) En la investigación, el número de bebés recién nacidos es 45. Falsa
- b) La mayoría de los recién nacidos tienen un peso promedio de 3.25 kg. Falsa
- c) Los niños con menor peso son muy pocos, solo 6 de 50 niños tuvieron un peso entre 2.5 y 3 kg. Verdadero
- d) Lo que señala la gráfica poligonal es que el peso de los recién nacidos va de 2.5 kg a 4.5 kg. Verdadero

6. En un laboratorio se tomó una muestra de 120 paquetes de leche en polvo cuya etiqueta dice: Contenido neto 250 g. Se trataba de averiguar el peso real de cada paquete y se obtuvieron los siguientes datos, ya ordenados de menor a mayor.

243, 243, 243, 244, 244, 245, 245, 246, 246, 246, 246, 246, 246, 246, 247, 247, 247, 247, 247, 247,
247, 247, 247, 248, 248, 248, 248, 248, 248, 248, 248, 248, 249, 249, 249, 249, 249, 249, 249,
249, 249, 249, 249, 249, 249, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250,
250, 250, 250, 250, 250, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251, 251,
251, 251, 251, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 252, 253, 253, 253,
253, 253, 253, 254, 254, 254, 254, 254, 255, 255, 255, 255, 255, 256, 256, 256, 257, 257, 257, 258

En virtud de que son muchos datos, conviene organizarlos en una tabla de distribución de frecuencias agrupadas, complétela con base en los datos registrados y después contesten lo que se pregunta.

Tabla de distribución de frecuencias agrupadas

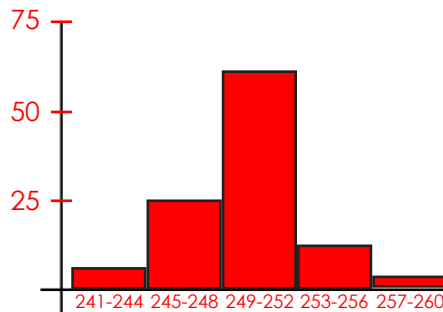
	Intervalos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	241 - 244	///	5	0.0416666666
2	245 - 248	/// //	28	0.23333333
3	249 - 252	/// //	64	0.53333333
4	253 - 256	/// //	19	0.15833333
5	257 - 260	///	4	0.03333333
Total			120	

- a) ¿En cuántos intervalos se organizaron los 120 datos? 5
- b) La marca de clase es el promedio entre el límite inferior y el límite superior de cada clase. ¿Cuál es la marca de clase de la cuarta clase? 254.4

Representa los datos de la tabla en un histograma y una gráfica poligonal, pero antes anota lo que se te pide:

a) Anota el título de la gráfica. Peso real de cada paquete

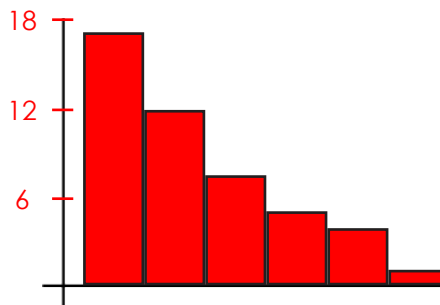
b) Anota los encabezados de los ejes, en el eje vertical van las frecuencias. ¿Qué va en este caso en el eje horizontal? Los intervalos



7. En una clínica veterinaria se atendieron las siguientes mascotas durante una semana.

Perros	Gatos	Hurones	Pájaros	Hámster	Iguanas
17	12	8	5	4	2

Elabora el Histograma correspondiente a la tabla de datos anterior.



PROBABILIDAD

La probabilidad es el grado de certidumbre con que medimos la ocurrencia de cierto resultado.

La probabilidad se mide con valores que van desde cero, para la imposibilidad de ocurrencia, hasta 1, cuando se tiene toda la seguridad de que se presentará cierto resultado.

La probabilidad mide las posibilidades de que cada uno de los posibles resultados en un suceso que depende del azar sea finalmente el que se dé. Llamamos sucesos a los posibles resultados de una acción que depende del azar. Distinguiamos 3 tipos de sucesos:

Suceso posible: Es un resultado que se puede dar.

Por ejemplo, el 5 es un suceso posible cuando lanzamos un dado.

Suceso imposible: Es un resultado que no se puede dar.

Por ejemplo, el 7 es un suceso imposible cuando lanzamos un dado (el dado no tiene el número 7).

Suceso seguro: Es un resultado que siempre se va a dar.

Por ejemplo, "número menor de 7" es un suceso seguro cuando lanzamos un dado (cualquier número que salga al lanzar el dado será menor que 7).

Dentro de los sucesos posibles vamos a distinguir:

Suceso igual de probable: es aquel resultado que tiene la misma probabilidad que los demás:

Por ejemplo: cuando lanzamos una moneda, el suceso "cara" tiene las mismas probabilidades que el suceso "cruz".

Suceso muy probable: es aquel resultado que tiene muchas probabilidades de darse:

Por ejemplo: en una bolsa con 100 bolitas numeradas del 1 al 100, el suceso "sacar una bola con un número entre 1 y 98" tiene muchas probabilidades de ocurrir.

Suceso poco probable: es aquel resultado que tiene muy pocas probabilidades de darse:

Por ejemplo: en una bolsa con 100 bolitas, 99 blanca y 1 negra, el suceso "sacar la bola negra" tiene pocas probabilidades de ocurrir.



Ejercicios:

1. En una urna hay 5 bolas, cuatro rojas y una azul, sacamos una bola y anotamos su color. Escribe el espacio muestral y califica cada suceso según su probabilidad:

Tipo de Suceso	Suceso
Seguro	Sacar bola roja o azul
Poco probable	Sacar bola azul
Imposible	Sacar bola verde
Posible	Sacar bola roja

2. Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo que sale. Escribe el espacio muestral y completa la tabla con ejemplos de distintos sucesos:

Tipo de Suceso	Suceso
Suceso Seguro	sacar copas, bastos, oros, espadas
Suceso Posible	sacar copas
Suceso imposible	sacar manzanas
Suceso muy poco probable	sacar 1 de copas
Suceso poco probable	sacar un palo de copas

3. En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10, sacamos una bola y anotamos el número. Escribe el espacio muestral y califica cada suceso según su probabilidad:

Tipo de Suceso	Suceso
Suceso Seguro	sacar una bola del 1, 2,... 10
Suceso Posible	sacar 10
Suceso imposible	sacar 0
Suceso muy poco probable	sacar 2 veces la bola 1
Suceso poco probable	sacar 1 vez la bola 1



Existen dos tipos de probabilidad: la **probabilidad clásica**, también llamada teórica o matemática, y la **probabilidad frecuencial** o empírica.

La probabilidad clásica o teórica se aplica cuando cada evento simple del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Fórmula para obtener la probabilidad clásica o teórica:

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{número de resultados favorables al evento}}{\text{número total de resultado posibles}}$$

$$\text{utilizando símbolos: } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

La diferencia entre probabilidad clásica y probabilidad frecuencial radica en que la primera se obtiene sin efectuar el experimento y la segunda después de haberlo efectuado un gran número de veces.

Ejemplos:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3, en el lanzamiento de un dado?

Si E: 4, 5, 6, entonces el número de resultados favorables es $n(E) = 3$

Si S: 1, 2, 3, 4, 5, 6, entonces el número total de resultados posibles es $n(S) = 6$

Por tanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una canica roja de una bolsa que contiene 3 canicas negras, 5 amarillas y 2 rojas?

r = rojas

n = negras

a = amarillas

Si E: r_1, r_2 , entonces $n(E) = 2$

Si S: $n_1, n_2, n_3, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, r_1, r_2$, entonces $n(S) = 10$

Por tanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$



Probabilidad frecuencial

Recibe el nombre de evento aleatorio el resultado de un experimento, que no se puede predecir, porque depende del **azar**. Sin embargo, es muy importante registrar en una **tabla de frecuencias**, todos los resultados de un experimento o de un conjunto de observaciones, porque de ellos depende obtener valiosas conclusiones inclusive **estimar**, con bastante aproximación, la ocurrencia de un suceso futuro.

Ejemplo:

Los jugadores titulares del equipo de baloncesto de una escuela anotaron, en los 10 partidos que llevan jugados, los puntos registrados en la siguiente tabla de frecuencias:

Jugador	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Carlos	89	$\frac{89}{520}$	17.1
Pedro	96	$\frac{96}{520}$	18.5
Juan	142	$\frac{142}{520}$	27.3
Jorge	91	$\frac{91}{520}$	17.5
Luis	102	$\frac{102}{520}$	19.6
TOTALES	520	1	100

Carlos tal vez sea probable que anote menos puntos en el siguiente partido.

Si en ese próximo partido todo el equipo anota 56 puntos, es probable que Jorge anote entre 9 y 10 puntos, porque si su porcentaje ha sido 17.5 entonces $17.5\% \text{ de } 56 = 9.8$.

La probabilidad antes calculada recibe el nombre de **probabilidad frecuencial**, porque se obtiene como resultado de considerar la relación que existe entre los datos registrados en una tabla de frecuencias.



Ejercicios:

1. Halla la probabilidad de que al levantar unas fichas de dominó se obtenga un número mayor que 9,

4	6	5	5	5	6	6	6
---	---	---	---	---	---	---	---

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Encuentra:

a) Probabilidad de que salga 7.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Probabilidad de que el número obtenido sea par.

$$P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

c) Probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3.

1	6	2	5	3	4	4	3	5	2	6	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$P = \frac{1}{3}$$

3. Probabilidad de que salga un múltiplo de 3.

1	2	1	5	2	1	2	4	3	3	3	6
4	2	4	5	5	1	5	4	6	3	6	6

$$P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

4. Se lanzan tres dados. Encuentra la probabilidad de que:

a) Salga 6 en todos los dados.

$$P = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

b) Que los puntos obtenidos sumen 7.

$$P(7) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

5. Busca la probabilidad de que, al lanzar un dado al aire, salga:

a) Un número par.

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



b) Un múltiplo de 3.

$$P(\text{mult } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6. En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 alumnos morenos. Un día asisten 44 alumnos, encontrar la probabilidad de que el alumno que falta:

a) Sea hombre.

$$P(H) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

b) Sea mujer morena.

$$P(Mm) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

c) Sea hombre o mujer.

$$P(H \cup M) = \frac{45}{45} = 1$$

7. En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche y las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche.

a) Si se saca una papeleta.

$$P = \frac{8}{20} = 0.4$$

b) Si se extraen dos papeletas.

$$P = 1 - \left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{11}{19}\right) = \frac{62}{95}$$

c) Si se extraen tres papeletas.

$$P = 1 - \left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{11}{19}\right)\left(\frac{10}{18}\right) = \frac{46}{57}$$



Se lanza un dado 40 veces y se obtienen los siguientes datos mostrados en la tabla siguiente:

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	7	$7/40 = 0.175$
2	11	0.275
3	6	0.15
4	5	0.125
5	6	0.15
6	5	0.125
Total	40	1

Las probabilidades frecuencias de que salga:

8. El número 3, $P(3) =$

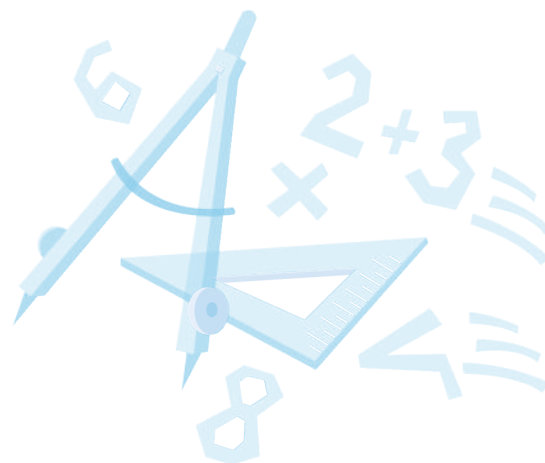
- a) 0
- b) 0.125
- c) 0.15
- d) 0.175

9. El número 4, $P(4) =$

- a) 0
- b) 0.125
- c) 0.15
- d) 0.175

10. El número 4, $P(1) =$

- a) 0
- b) 0.125
- c) 0.15
- d) 0.175



Se lanza 100 veces un dado y se obtiene:

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	12	0.12
2	17	0.17
3	18	0.18
4	16	0.16
5	18	0.18
6	19	0.19
Total	100	1

Las probabilidades frecuenciales de que salga:

11. El número 6, $P(6) =$

- a) 0.16
- b) 0.17
- c) 0.18
- d) 0.19

12. El número 5, $P(5) =$

- a) 0.16
- b) 0.17
- c) 0.18
- d) 0.19

13. El número 2, $P(2) =$

- a) 0.16
- b) 0.17
- c) 0.18
- d) 0.19

