Ecuaciones de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0$ .... ecuación general cuadrática

ax^2 *término cuadrático* **bx** *término lineal* **c** *término independiente*

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ *(ecuación completa)*

$x^2 - 4 = 0$ y $5x^2 - 45 = 0$ *(ecuaciones incompletas)*

Resolución por factorización

La ecuación cuadrática se descompone en dos factores lineales igualados con cero. Se generan dos ecuaciones de primer grado, que al resolverse permiten encontrar las dos raíces o soluciones de la ecuación. Por ejemplo:

$x^2 + 11x + 24 = 0$	$x^2 - 16 = 0$	$x^2 - 7x = 0$
$(x + 8)(x + 3) = 0$	$(x + 4)(x - 4) = 0$	$x(x - 7) = 0$
Igualamos con cero	Igualamos con cero	Igualamos con cero
$x + 8 = 0$ $\quad$ $x + 3 = 0$	$x + 4 = 0$ $\quad$ $x - 4 = 0$	$x = 0$ $\quad$ $x - 7 = 0$
$\boldsymbol{x_1 = -8}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_2 = -3}$	$\boldsymbol{x_1 = -4}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_2 = 4}$	$\boldsymbol{x_1 = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_2 = 7}$

Resuelve:

$x^2 - 5x - 14 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 25 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 3x = 0$

$x^2 + 2x - 35 = 0$ $\qquad$ $2x^2 + 7x + 3 = 0$ $\qquad$ $9x^2 + 15x + 4 = 0$

Resolución por fórmula general

Se identifican los valores *a* , *b* , *c* en la ecuación propuesta. Se sustituyen valores en la fórmula general, se realizan parcialmente operaciones y se determinan las dos soluciones o raíces de la ecuación, por ejemplo:

Ejemplo 1:

$x^2 + 9x + 14 = 0$ $\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = 9}$ $\boxed{c = 14}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ SUSTITUYENDO VALORES

$$x = \frac{-(9) \pm \sqrt{(9)^2 - 4(1)(14)}}{2(1)}$$ REALIZANDO OPERACIONES

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2}$$ BUSCANDO RAICES

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2} \qquad x_1 = \frac{-9 + 5}{2} = -2$$

$$x = \frac{-9 \pm 5}{2} \qquad x_2 = \frac{-9 - 5}{2} = -7$$

Ejemplo 2:

$x^2 - 7x - 44 = 0$ $\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = -7}$ $\boxed{c = -44}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ SUSTITUYENDO VALORES

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-44)}}{2(1)}$$ REALIZANDO OPERACIONES

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{49 + 176}}{2}$$ BUSCANDO RAICES

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{225}}{2} \qquad x_1 = \frac{+7 + 15}{2} = 11$$

$$x = \frac{+7 \pm 15}{2} \qquad x_2 = \frac{+7 - 15}{2} = -4$$

Resuelve:

$x^2 - 5x - 14 = 0$ $\quad$ $x^2 - 25 = 0$ $\quad$ $x^2 + 3x = 0$

$x^2 - 3x - 40 = 0$ $\quad$ $x^2 - 49 = 0$ $\quad$ $x^2 + 8x = 0$

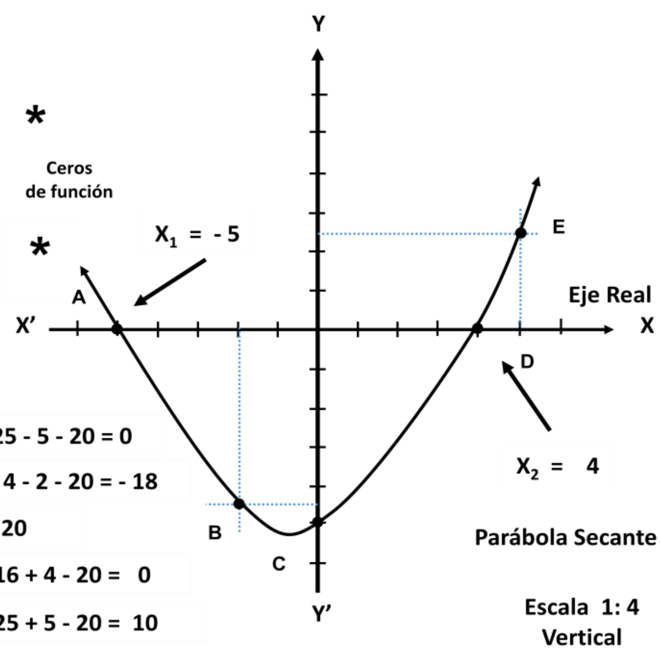
Procedimiento gráfico

Se iguala la ecuación cuadrática con y se construye un cuadro de tabulación, asignando valores al dominio y determinamos el valor de las imágenes. En la gráfica cartesiana se ubican los puntos encontrados y se busca la respuesta en el Eje Real (eje horizontal).

Ecuación cuadrática: $x^2 + x - 20 = 0$
Igualada con $y = x^2 + x - 20$

$y = x^2 + x - 20$

x	y	Puntos
- 5	0	A (-5 , 0) *
- 2	- 18	B (-2,-18)
0	- 20	C (0 ,-20)
4	0	D (4 , 0) *
5	10	E (5 , 10)



Asignamos valores a x
Buscamos valores de y

$y = (-5)^2 + (-5) - 20 = 25 - 5 - 20 = 0$

$y = (-2)^2 + (-2) - 20 = 4 - 2 - 20 = -18$

$y = (0)^2 + (0) - 20 = -20$

$y = (4)^2 + (4) - 20 = 16 + 4 - 20 = 0$

$y = (5)^2 + (5) - 20 = 25 + 5 - 20 = 10$

Ecuación cuadrática: $x^2 + 8x + 16 = 0$
Igualada con $y = x^2 + 8x + 16$

$y = x^2 + 8x + 16$

x	y	Puntos
- 8	16	A(-8 , 16)
- 4	0	B (-2, 0)
0	16	C(0 , 16)
2	36	D(4 , 36)
4	64	E(4 , 64)

*

Asignamos valores a x

Buscamos valores de y

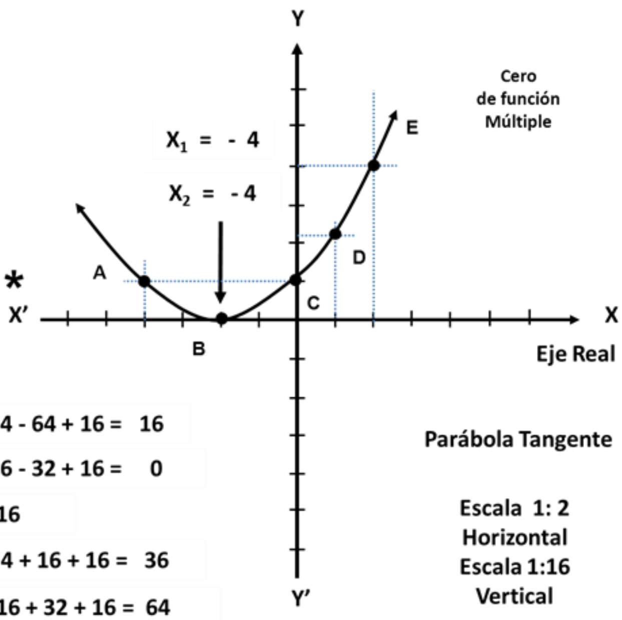
$y = (-8)^2 + 8(-8) + 16 = 64 - 64 + 16 = 16$

$y = (-4)^2 + 8(-4) + 16 = 16 - 32 + 16 = 0$

$y = (0)^2 + 8(0) + 16 = 16$

$y = (2)^2 + 8(2) + 16 = 4 + 16 + 16 = 36$

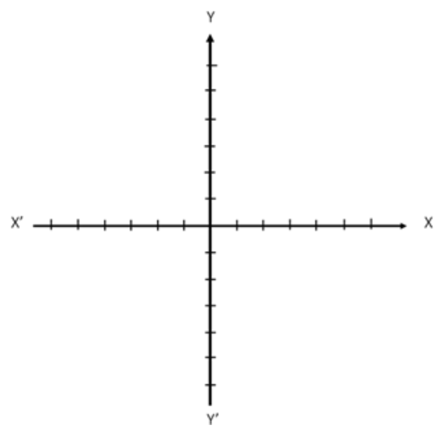
$y = (4)^2 + 8(4) + 16 = 16 + 32 + 16 = 64$



Construye la gráfica de las ecuaciones:

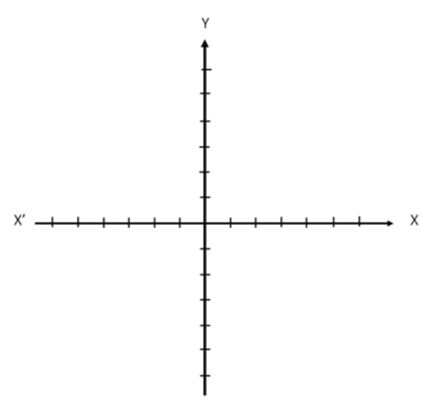
$x^2 - 25 = 0$
$y = x^2 - 25$

x	y	Puntos
- 6		
- 5		
0		
5		
6		



$x^2 - 3x = 0$
$y = x^2 - 3x$

x	y	Puntos
- 5		
- 3		
0		
3		
5		



Aplicación de ecuaciones cuadráticas en la resolución de problemas:

Ejemplo 1:

El producto de dos números es 91. ¿Cuáles son esos números, si sabemos que el mayor excede en 6 unidades al menor ? .

Número menor : x

Número mayor : $x + 6$

$x (x + 6) = 91$ Verificando operaciones

$x^2 + 6x = 91$ Transponer e igualar a cero

$\boxed{x^2 + 6x - 91 = 0}$

Resolvemos la ecuación

$x^2 + 6x - 91 = 0$

$(x + 13) (x - 7) = 0$

$(x + 13) = 0$

$\boxed{x_1 = -13}$

$(x - 7) = 0$

$\boxed{x_2 = 7}$ *

Número menor : $\boxed{7}$

Número mayor : $7 + 6$ $\boxed{13}$

Los números son 7 y 13

Ejemplo 2:

La suma de los cuadrados de las edades de Margarita y Josefina es 100 años. Si Margarita es dos años mayor, ¿ cuáles son sus edades ?

Josefina : x

Margarita : $x + 2$

$x^2 + (x + 2)^2 = 100$ Verificando operaciones

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$ Transponer e igualar a cero

$2x^2 + 4x + 4 = 100$

$\boxed{2x^2 + 4x - 96 = 0}$

Simplificando

$\boxed{x^2 + 2x - 48 = 0}$

Resolvemos la ecuación

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x + 8) (x - 6) = 0$

$(x + 8) = 0$

$\boxed{x_1 = -8}$

$(x - 6) = 0$

$\boxed{x_2 = 6}$ *

Josefina : $\boxed{6 \text{ años}}$

Margarita : $6 + 2$ $\boxed{8 \text{ años}}$

Margarita tiene 8 años y Josefina tiene 6 años

Resuelve:

El área de un rectángulo equivale a 99 m^2, si sabemos que su base es 2 metros mayor que la altura, ¿Cuáles son sus dimensiones?

El producto de dos enteros consecutivos pares es 48. Encuentra esos números.

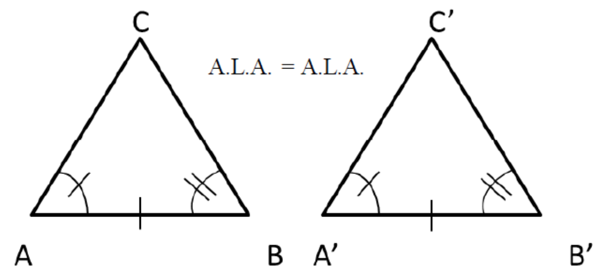
En un polígono se pueden trazar 27 diagonales. Calcula el número de lados.

Igualdad o congruencia de triángulos

Dos triángulos son iguales o congruentes cuando se les puede hacer coincidir en todas sus partes por superposición.

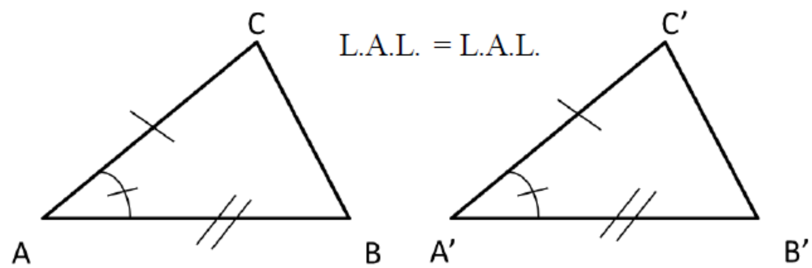
Existen tres casos principales de igualdad o congruencia de triángulos.

1) Dos triángulos son iguales o congruentes cuando tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente iguales (A.L.A)
2) Dos triángulos son iguales o congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo que forman respectivamente iguales (L.A.L.)
3) Dos triángulos son iguales o congruentes cuando Tienen los tres lados respectivamente iguales (L.L.L.)



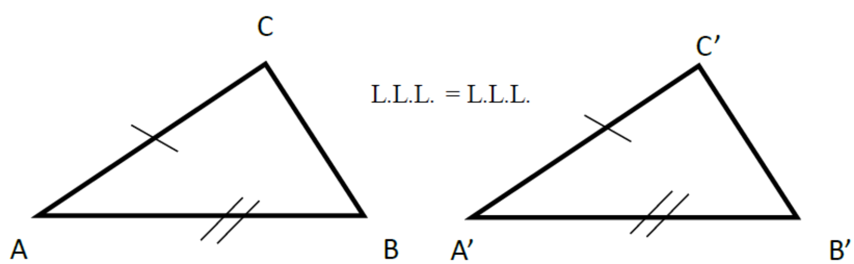
$< A = < A'$, $AB = AB'$, $< B = < B$

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$



$AC = A'C'$, $< A = < A'$, $AB = A'B'$

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$



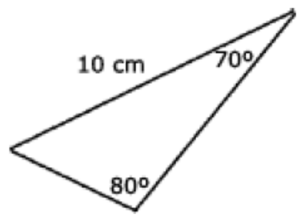
$CA = C'A'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$

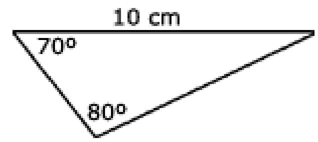
Resuelve

1) Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes.

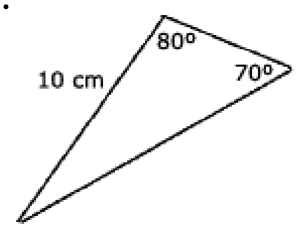
I.



II.

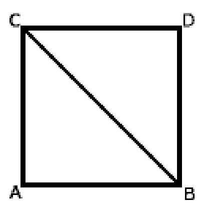


III.



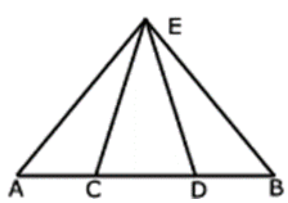
a) Sólo I y II b) Sólo I y III c) Sólo II y III d) I, II y III e) Ninguno

2) Un alumno para demostrar en el cuadrado de la figura que △ABC ≅△BCD, determinó que AB ≅BD, que AC ≅DC y que el ∠CAB ≅∠BDC, por ser rectos. ¿Qué criterio de congruencia utilizó?



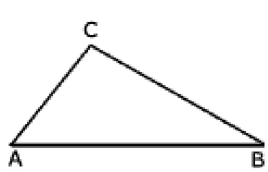
a) LLL
b) LAL
c) ALA
d) AAL
e) LLA

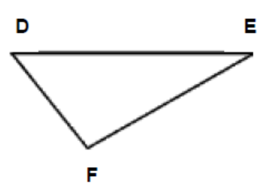
3) En la figura, el △CDE es isósceles. C es punto medio de AD y D es punto medio de CB. ¿Qué criterio de congruencia permite demostrar que el △ CE≅△BDE?



a) LAL
b) ALA
c) LLA
d) LLL
e) AAL

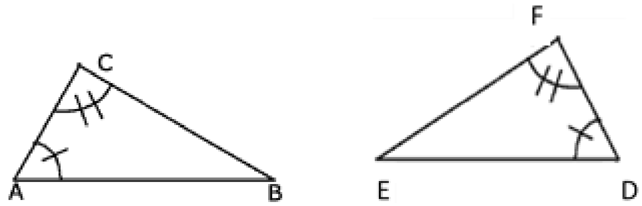
4) En los triángulos siguientes se verifica que AB ≅DE, que BC ≅EF y que el ∠ CAB ≅∠FDE. ¿Qué criterio permite demostrar que estos triángulos son congruentes?





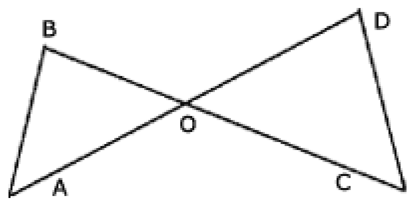
a) LLL
b) LAL
c) ALA
d) LLA
e) Falta Información

5) En la figura, el △ABC ≅△DEF, entonces se verifica que:



a) AC ≅DF
b) BC ≅DE
c) AB ≅FE
d) AC ≅FE
e) AB ≅FD

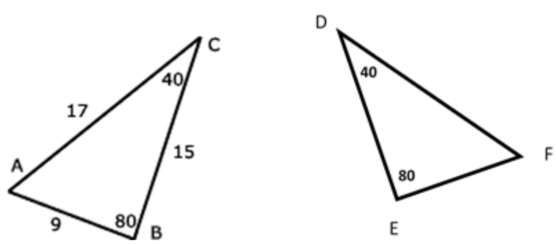
6) Para demostrar que los triángulos AOB y COD de la figura, son congruentes, es necesario saber que:



a) AB ≅DC
b) ∠BAO ≅∠DCO
c) AB //CD
d) AO ≅DO y AB ≅CD
e) BO ≅CO y AO ≅DO

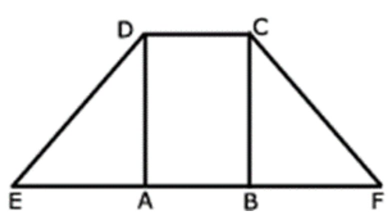
7) Marca la alternativa de la proposición verdadera
   a) Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus ángulos agudos respectivos son congruentes.
   b) Dos triángulos son congruentes si sus lados homólogos miden lo mismo.
   c) Dos triángulos son congruentes si sus ángulos respectivos son iguales.
   d) Para demostrar que dos triángulos son congruentes se puede utilizar el criterio AAL
   e) Todos los triángulos equiláteros son congruentes.

8) Los triángulos ABC y DEF de la figura son congruentes, entonces la medida de EF es:



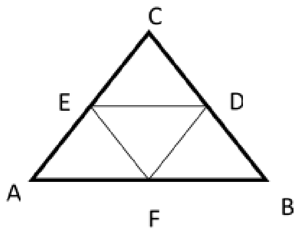
a) 9
b) 15
c) 17
d) 40
e) Falta información

9) En la figura, ABCD es rectángulo y el ∠DEA ≅∠CFB.



¿Qué criterio permite demostrar que el △EAD ≅△FBC?
a) LLL
b) LLA
c) ALA
d) LLA
e) Falta Información

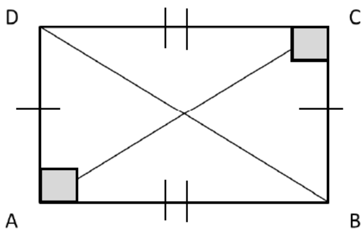
10) En la figura, △ABC equilátero y AF ≅BD ≅CE. El criterio que permite demostrar que los triángulos AFE, ECD y BDF son congruentes es:



a) LAL
b) LLL
c) ALA
d) LLA
e) LAA

Observa con atención las figuras propuestas. Utiliza uno de los criterios de igualdad de triángulos para demostrar lo que se pide.

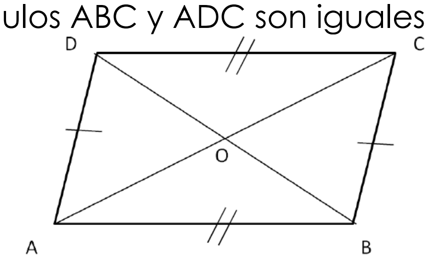
1. Demostrar que las diagonales de un rectángulo son iguales.



ABCD es un rectángulo
AC y BD son diagonales de un rectángulo
AC = BD si demuestro que Δ ABD ≅ Δ BCD

Afirmaciones	Razones
$\overline{AD} = \overline{BC}$	
Ángulo A = Ángulo C	
$\overline{AB} = \overline{DC}$	
Δ ABD ≅ Δ BCD	
∴ AC = BD	

2. Probar que los triángulos ABC y ADC son iguales.



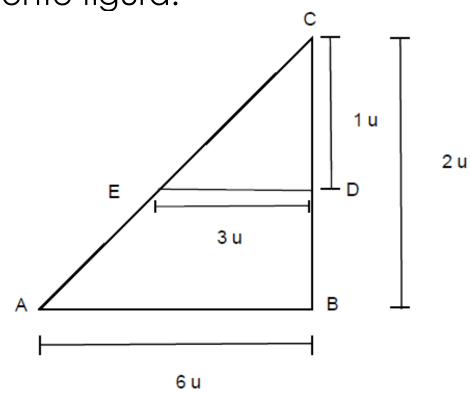
ABCD es un paralelogramo

Afirmaciones	Razones
$\overline{AD} = \overline{BC}$	
$\overline{AB} = \overline{CD}$	
$\overline{AC} = \overline{AC}$	
∴ Δ ABC ≅ Δ ADC	

Semejanza

Dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos homólogos son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales

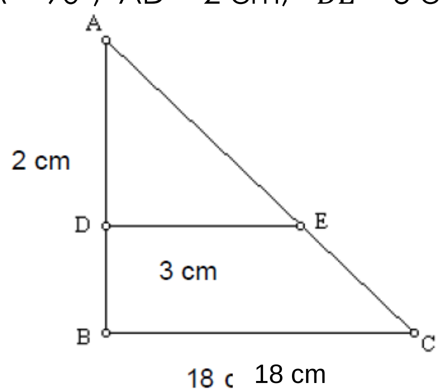
Encuentra la razón de semejanza en los triángulos ΔABC y ΔCDE que se representan en la siguiente figura:



Se establecen razones entre lados homólogos: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

Resuelve:

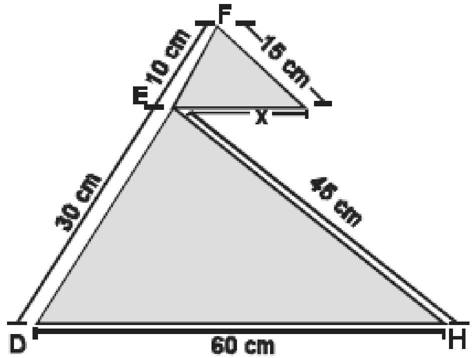
1. Encuentra la medida del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ conociendo que: $\overline{\mathrm{DE}}$ // $\overline{BC}$, medida del ángulo EDA = 90°, AD = 2 cm, $\overline{\mathrm{DE}}$ = 3 cm y $\overline{\mathrm{BC}}$ = 18 cm



2. José va a hacer un letrero semejante al que se representa en el siguiente dibujo:

Si el letrero debe medir 90 unidades de largo, ¿cuánto medirá de ancho, si se conserva la semejanza del letrero?

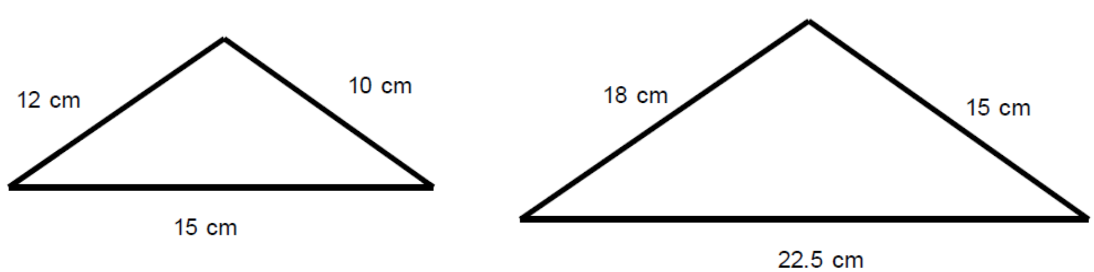
3. La siguiente figura representa la alberca de un hotel a escala y se quiere hacer un chapoteadero en proporción a la misma, como se muestra a continuación:



¿Cuál es el valor de x?

4. A cierta hora del día, una torre de 35 m de altura proyecta una sombra de 20 m. ¿Cuál es la altura de una persona que a la misma hora proyecta una sombra de 1.2 m?

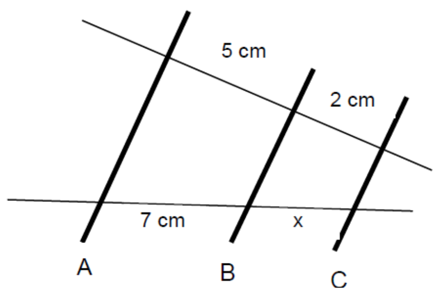
5. ¿Son semejantes los triángulos siguientes? : Justifica tu respuesta.



Teorema de tales

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, dos segmentos cualesquiera de una de éstas son proporcionales a los dos segmentos correspondientes de la otra.

Las rectas A, B y C son paralelas, encontrar la longitud de x:

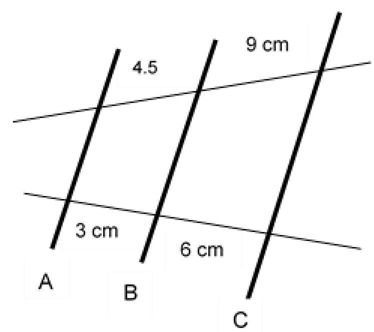


$$\frac{x}{2} = \frac{7}{5}$$

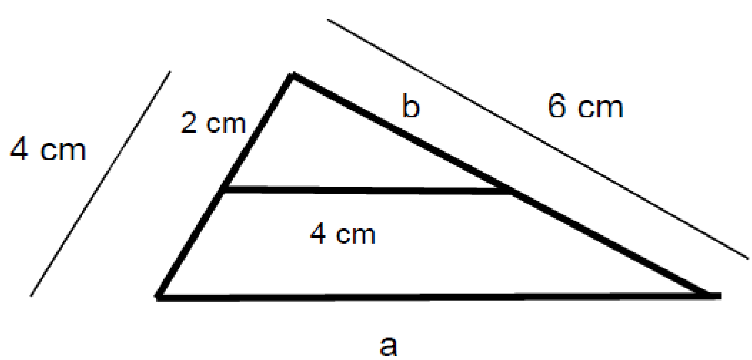
$$x = \frac{2 \times 7}{5}$$

$$x = 2.8 \text{ cm}$$

1. Las rectas A y B son paralelas. Teniendo en cuenta las medidas que se dan en el dibujo, ¿Se puede asegurar que la recta C es paralela a las rectas A y B? Justifica tu respuesta.



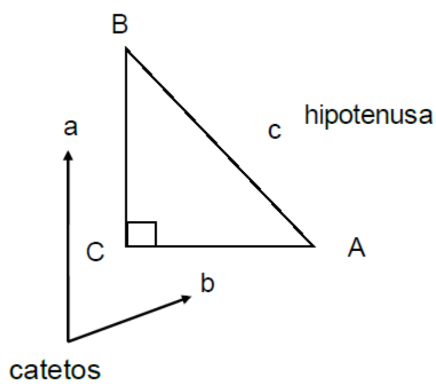
2. Encuentra el valor de los segmentos a y b.

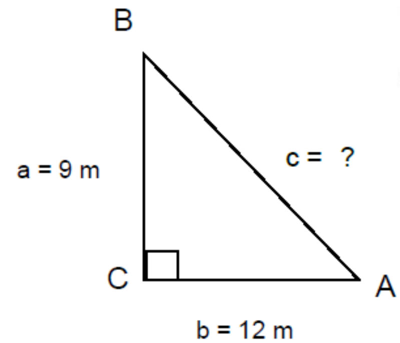


Teorema de Pitágoras

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

$a^2 + b^2 = c^2$





$c^2 = a^2 + b^2$

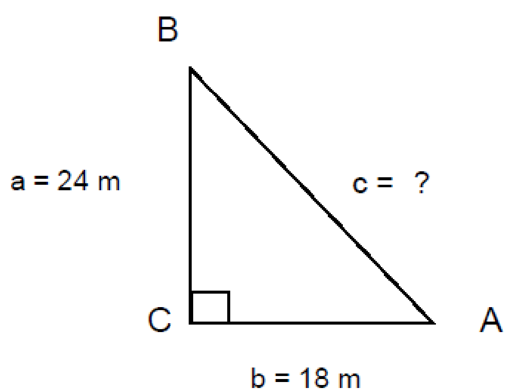
$c^2 = 9^2 + 12^2$

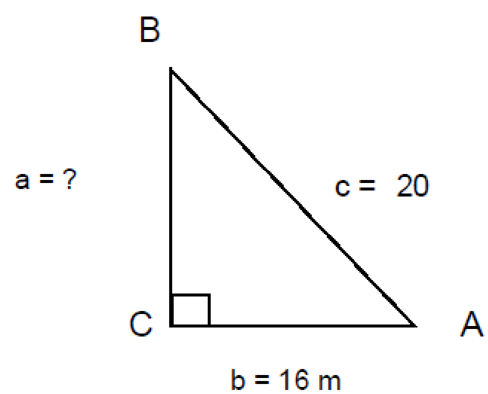
$c^2 = 81 + 144$

$c = \sqrt{225}$

$c = 15$ m

Resuelve:

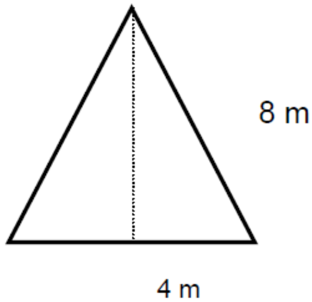




Problemas de aplicación:

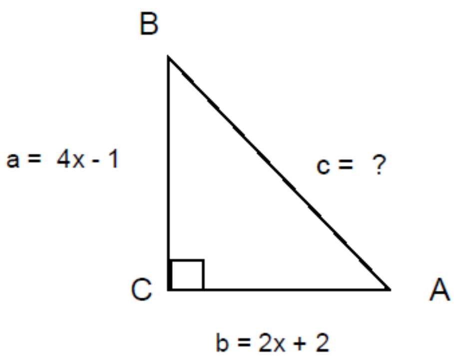
1. Calcula la longitud de una escalera, sabiendo que está apoyada en la pared a una distancia de 1.80 m del suelo y alcanza una altura de 7m.

2. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 8 cm por lado.



3. Determina el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de 12 cm de lado. ¿Serán iguales sus áreas?

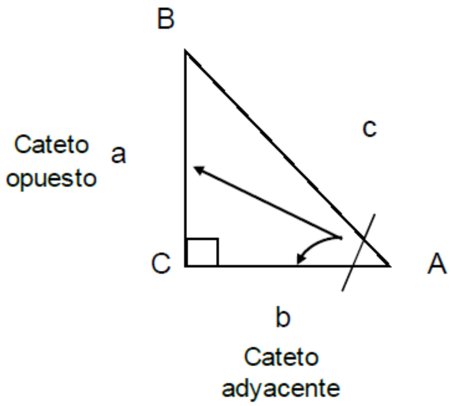
4. En el siguiente triángulo rectángulo:
¿Qué expresión algebraica representa la hipotenusa?



Funciones trigonométricas

Cada función = Cociente entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo

$$\text{Secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$$



$$\text{Seno A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno A} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

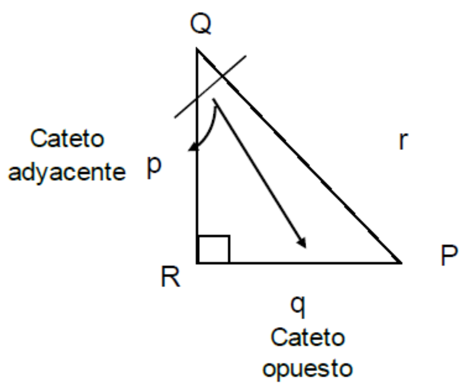
$$\text{Tangente A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente A} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Secante A} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante A} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Identifica las funciones trigonométricas en los siguientes triángulos rectángulos:



Sen Q =

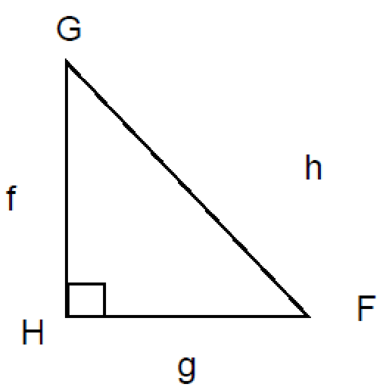
Csc Q =

Cos Q =

Sec Q =

Tan Q =

Cot Q =



Sen F =

Csc F =

Cos F =

Sec F =

Tan F =

Cot F =

Utiliza calculadora o tablas matemáticas para determinar el valor natural de las siguientes funciones trigonométricas:

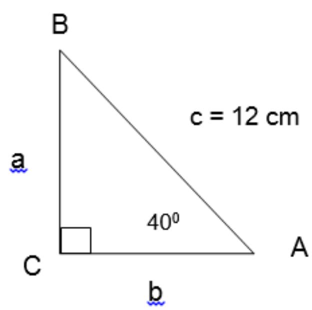
Sen 45° 12'	= ____________	Cos 37° 38'	= ____________
Tan 36° 43'	= ____________	Sen 11° 28'	= ____________
Cos 75° 10'	= ____________	Tan 67° 13'	= ____________
Sen 15° 40'	= ____________	Cos 17° 53'	= ____________

Utiliza calculadora o tablas matemáticas para determinar el ángulo que corresponde a los siguientes valores naturales:

Sen A = 0.7321	$\angle$ A = ________	Cos B = 0.2532	$\angle$ B = ________
Tan C = 0.4379	$\angle$ C = ________	Sen X = 0.9517	$\angle$ X = ________
Cos M = 0.8321	$\angle$ M = ________	Tan W = 0.3592	$\angle$ W = ________
Sen C = 0.5351	$\angle$ C = ________	Cos Z = 0.7512	$\angle$ Z = ________

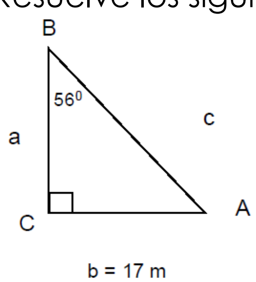
Resolución de triángulos rectángulos

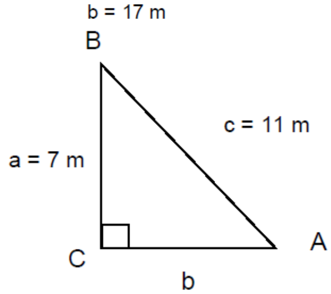
Resolver un triángulo significa encontrar sus elementos desconocidos, por ejemplo:



Ángulo B = 90^0 – Ángulo A	Ángulo B = 90^0 - 40^0		**Ángulo B = 50^0**
Sen A = $\frac{a}{12}$	a = 12 Sen 40^0	a = 12 x .6428	**a = 7.71 m**
Cos A = $\frac{b}{12}$	b = 12 Cos 40^0	b = 12 x .7660	**a = 9.19 m**

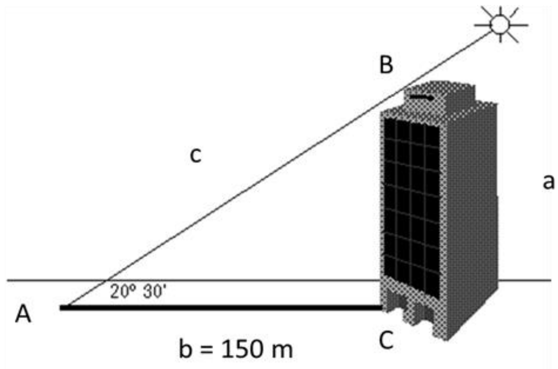
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:





Uso de las funciones trigonométricas en la resolución de problemas.

Un edificio proyecta una sombra de 150 m cuando el sol forma un ángulo de 20^0 30' sobre el horizonte. Calcula la altura del edificio.



Tan 20° 30' = $\frac{a}{150}$

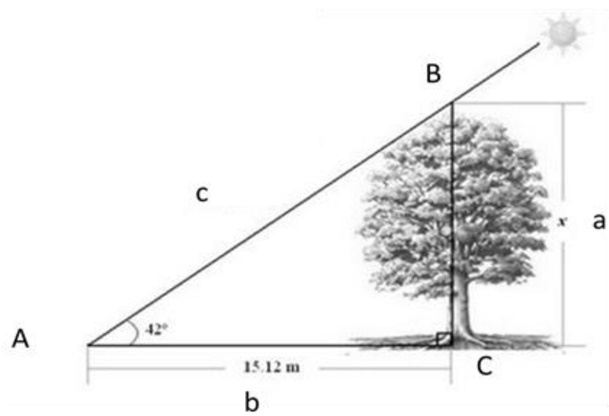
a = 150 Tan 20° 30'

a = 150 x 0.3739

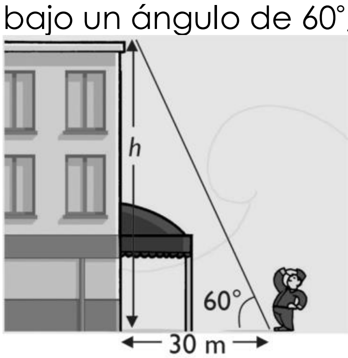
a = 56.085 m

Resuelve:

1. Un árbol proyecta una sombra de 15.12 m. El ángulo de elevación desde el extremo de la sombra a la copa del árbol es de 42°. Calcula la altura del árbol.



2. Una persona colocada a 30 m de un edificio, observa su punto más alto bajo un ángulo de 60°, calcula la altura del edificio.



3. El ángulo de elevación de una torre es de 28° 19’ y la distancia de la base al punto de observación es 95 m. Encuentra la altura de la torre.

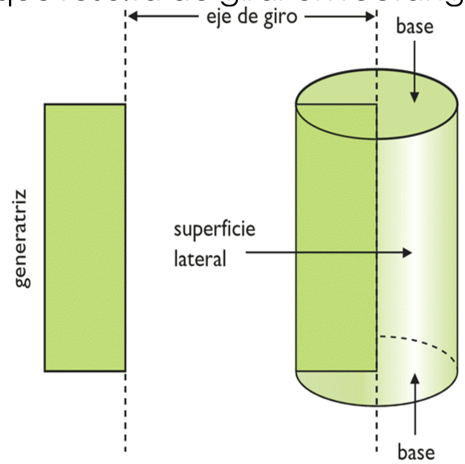
4. Desde la cumbre de un cerro de 300 m de alto, el ángulo de depresión de un barco es de 17° 35’. Encuentra la distancia del barco al punto de observación.

5. Para calcular la altura de la Torre Eiffel, nos situamos a 74 m de su base y se observa el punto más alto de la torre con un ángulo de elevación de 75°. ¿Cuál es la altura de la torre?

Cuerpos redondos y sus características
Cuerpos limitados, parcial o totalmente por superficies curvas.

Cilindro

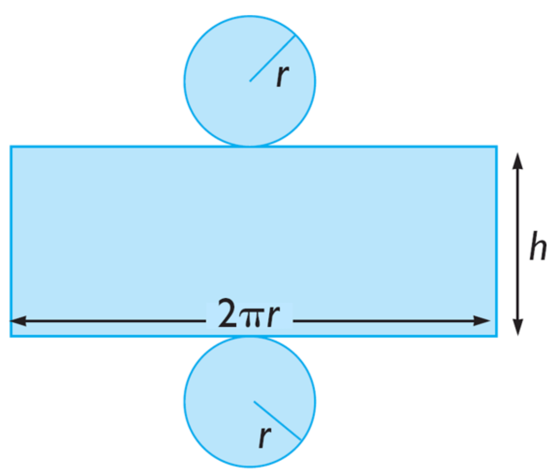
Cuerpo de revolución que resulta de girar un rectángulo alrededor de su eje.



Elementos de un cilindro

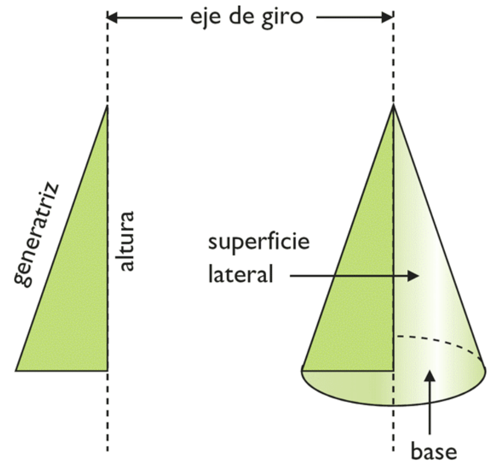
Bases: dos círculos iguales y paralelos.
Radio: radio de cada una de sus bases.
Generatriz: lado del rectángulo opuesto al eje que genera la superficie cilíndrica.
Eje: lado fijo del rectángulo que, al girar sobre sí mismo, engendra al cilindro.
Altura: longitud de la generatriz.
Superficie lateral: cara lateral, cuyo desarrollo es un rectángulo.

Desarrollo de un Cilindro



Cono

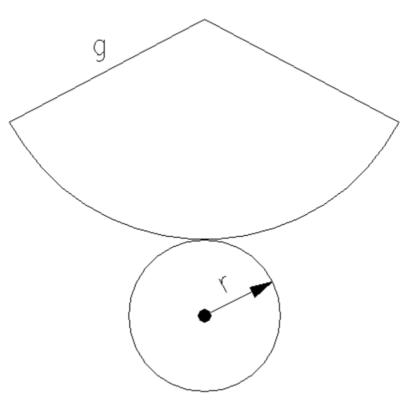
Cuerpo de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



Elementos de un cono

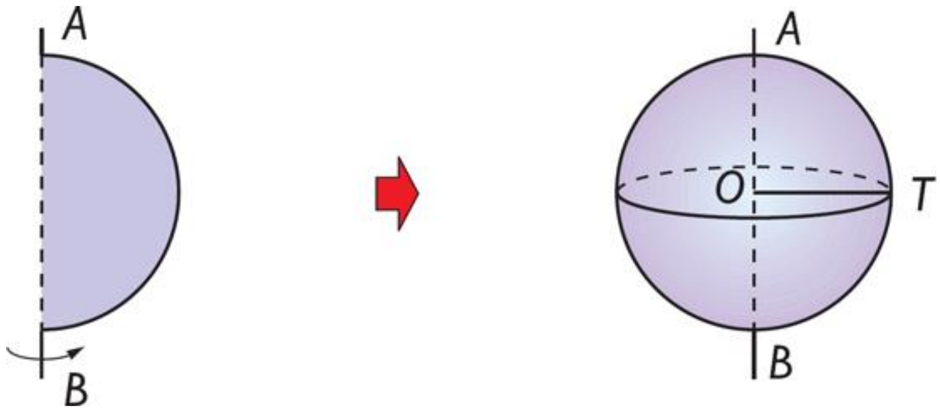
Eje: es un cateto. Alrededor de él gira el triángulo rectángulo.
Base: es el círculo que genera la rotación del otro cateto.
Generatriz: hipotenusa del triángulo que genera la región lateral conocida como manto del cono.
Altura: corresponde al eje del cono, une el centro del círculo con la cúspide. Perpendicular

Desarrollo de un cono

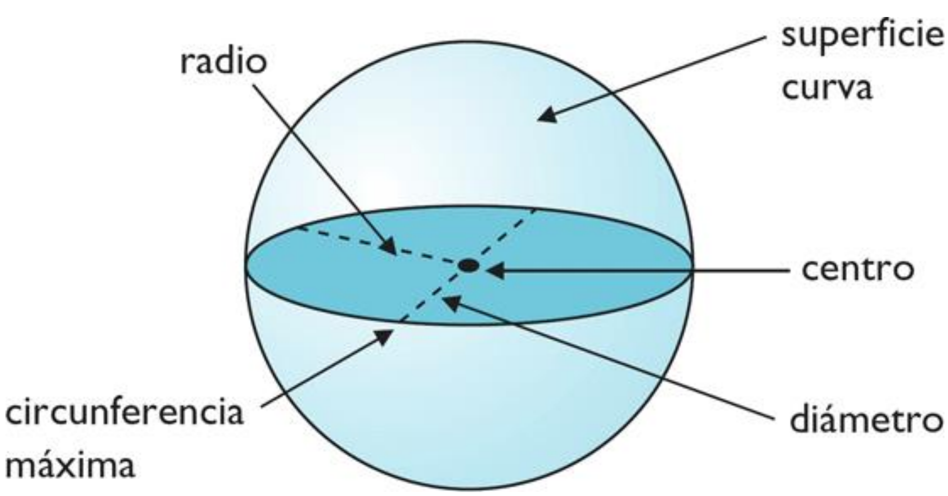


Esfera

Cuerpo de revolución generado por un semicírculo que gira alrededor de su diámetro



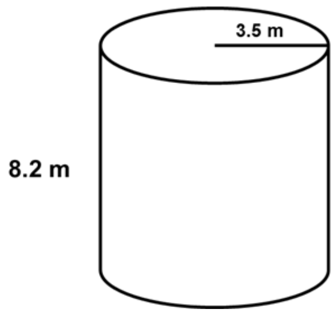
Elementos de una esfera



Estimar y calcular volúmenes

La unidad de volumen es el espacio ocupado por un cubo cuya arista es igual a la unidad de longitud. Volumen de un sólido es el número de unidades de volumen que contiene.

Volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base por su altura.

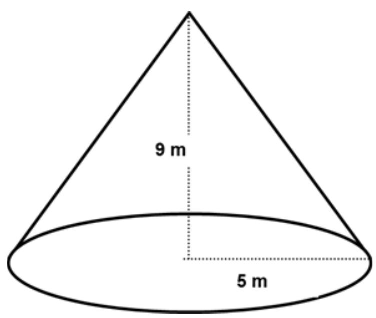


$V = \pi r^2 h$

$V = (3.14 \times 12.25) \times 8.2$

$\mathbf{V = 315.413\ m^3}$

Volumen de un cono es igual al tercio del producto del área de la base por la altura

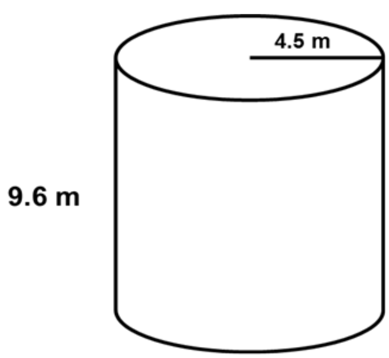


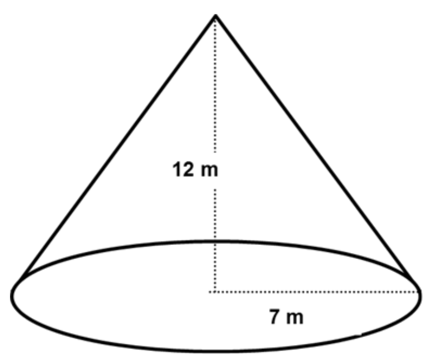
$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

$V = \dfrac{(3.14 \times 25) \times 9}{3}$

$\mathbf{V = 235.5\ m^3}$

Encuentra el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

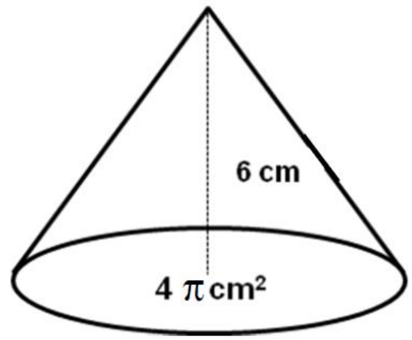




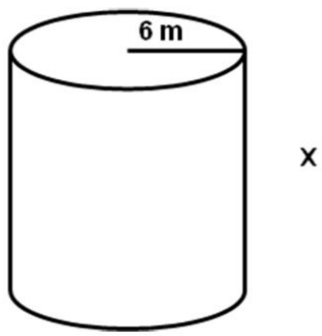
Resuelve los siguientes problemas

Problemas de aplicación:

1. El área de la base de un cono es de 4 π cm^2. Si el volumen del cono es la tercera parte del producto del área de la base por su altura, ¿cuál es el volumen del cono si su altura mide 6 cm?

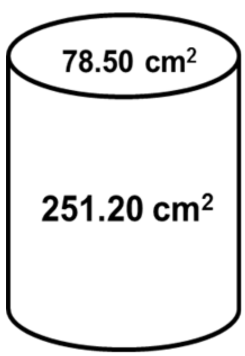


2. La siguiente figura representa un cilindro:



¿Qué altura debe tener para alcanzar un volumen de 904.32 m^3?

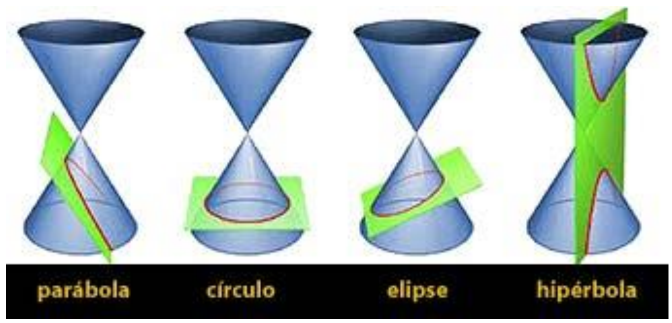
3. Determina el volumen de un cilindro que tiene de área lateral 251.20 cm^2 y de área de la base 78.50 cm^2.



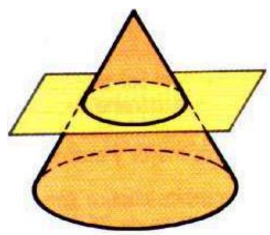
Secciones cónicas

Sección cónica es la intersección de un plano cualquiera con un cono de revolución.

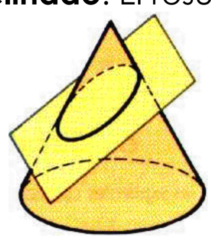
Círculo, **elipse**, **parábola** e **hipérbola** reciben el nombre de secciones cónicas



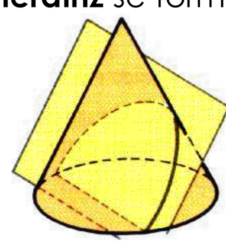
Si el **plano es perpendicular al eje** del cono, la intersección resultante es un **círculo**



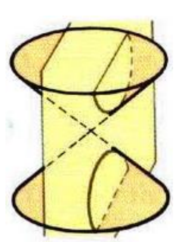
Si el **plano está ligeramente inclinado**. El resultado es una **elipse**.



Si el **plano es paralelo a la generatriz** se forma una **parábola**

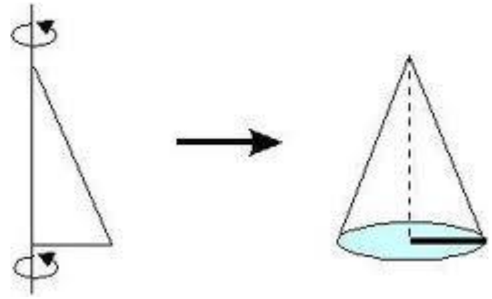


Si el **plano corta los dos mantos del cono**, la intersección resultante es una **hipérbola**

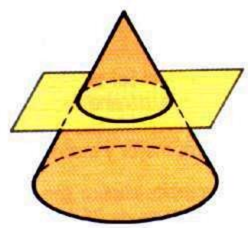


Cortes paralelos a la base en un cono
Longitud de los radios

Un cono se genera por el movimiento de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus
Catetos. El eje del cono es uno de los catetos del triángulo rectángulo

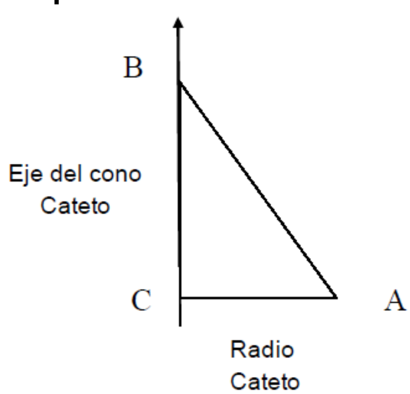


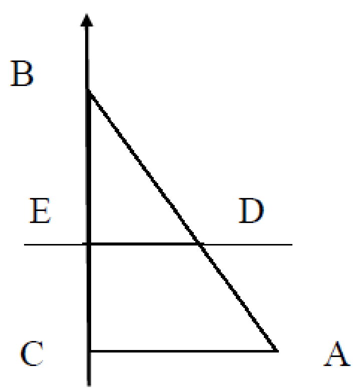
Si un **plano perpendicular al eje** intersecta al cono, la resultante es un **círculo**



¿Cómo encontrarías los radios de los círculos que se obtienen por estos cortes?

Por ejemplo:

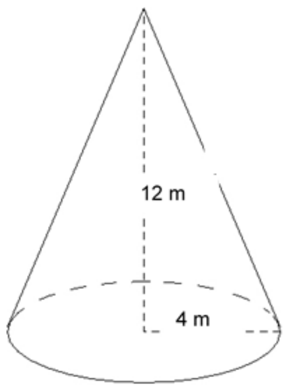




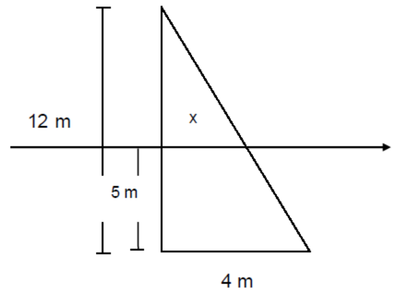
Se forman dos triángulos semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DBE$$

Calcula el valor de los radios:



Plano horizontal corta a la base del cono a una altura de 5 m. ¿Cuál será la longitud del radio?

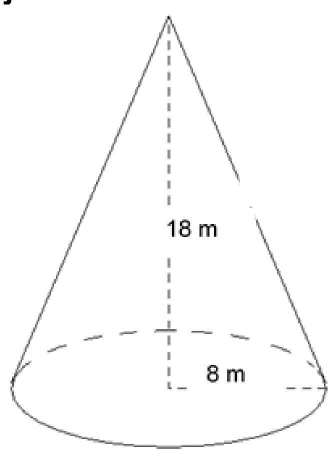


$$\frac{12}{7} = \frac{4}{x}$$

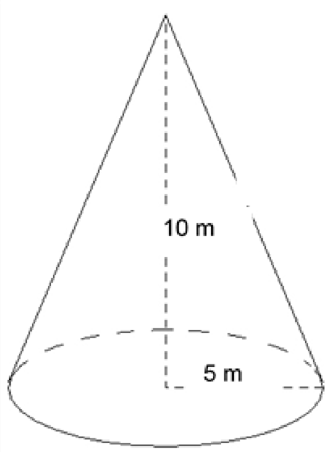
$$x = \frac{7 \times 4}{12}$$

$$x = \ 2.33\ m$$

Ejercicios



Corte a 11 m de la base del cono ¿Cuál será la longitud del radio?



Corte a 2 m de la base del cono ¿Cuál será la longitud del radio?

Sucesiones numéricas

Sucesiones numéricas de la forma $ax^2 + bx + c$

Procedimiento de diferencias finitas

Dada la sucesión numérica 1, 3, 6, 10,… Encuentra su generalización.

Diferencias finitas

$an^2 + bn + c$

1	$a + b + c$		
		$3a + b$	
2	$4a + 2b + c$		$2a$
		$5a + b$	
3	$9a + 3b + c$		$2a$
		$7a + b$	
4	$16a + 4b + c$		

$$a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$$
$$a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$$
$$a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$$
$$a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b + c$$

c	b	a
1		
	2	
3		1
	3	
6		1
	4	
10		

$$2a = 1$$
$$a = \frac{1}{2}$$

$$3a + b = 2$$
$$\frac{3}{2} + b = 2$$
$$b = \frac{1}{2}$$

$$a + b + c = 1$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 1$$
$$c = 0$$

$an^2 + bn + c$

$$\frac{n^2 + n}{2}$$

Generalización

Dada la sucesión numérica 10, 24, 44, 70, 102,… Encuentra su fórmula

10 , 24 , 44 , 70 , 102, …

Diferencias finitas entre elementos de la sucesión:

c	b	a
10		
	14	
24		**6**
	20	
44		**6**
	26	
70		

Sustituimos valores encontrados:

$$2a = 6$$
$$a = 3$$

$$3a + b = 14$$
$$9 + b = 14$$
$$b = 5$$

$$a + b + c = 10$$
$$3 + 5 + c = 10$$
$$c = 2$$

$$3n^2 + 5n + 2$$

Encuentra la generalización de las siguientes sucesiones numéricas:

4, 15, 30, 49, 72,…

4		
	11	
15		4
	15	
30		4
	19	
49		4
	23	
72		

$2a =$ $\qquad$ $3a + b =$ $\qquad$ $a + b + c =$

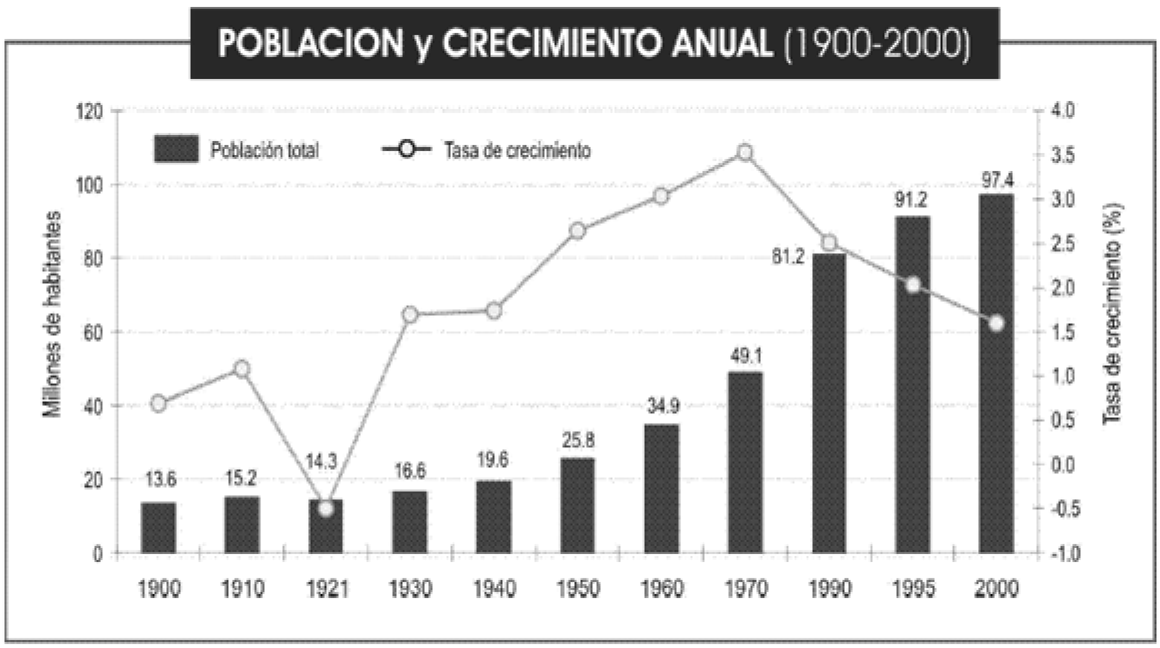
5, 11, 21, 35, 53,…

– 4, – 1, 4, 11, 20,…

Razón de cambio
Cuando dos variables (magnitudes) están conectadas mediante una relación funcional, se puede estudiar el ***cambio relativo de una de las variables respecto de la otra***; es decir, se pueden determinar y analizar las razones de cambio del fenómeno.

Ejemplos de razones de cambio: tasa de crecimiento, velocidad, aceleración, velocidad de enfriamiento o calentamiento.

Por ejemplo:
Durante el siglo pasado (1900 – 2000), el número de habitantes en nuestro país se ha incrementado considerablemente. El Instituto Nacional de Estadística y Geografía presentó la siguiente información:



Fuente: INEGI 1995, 1996, 2000.

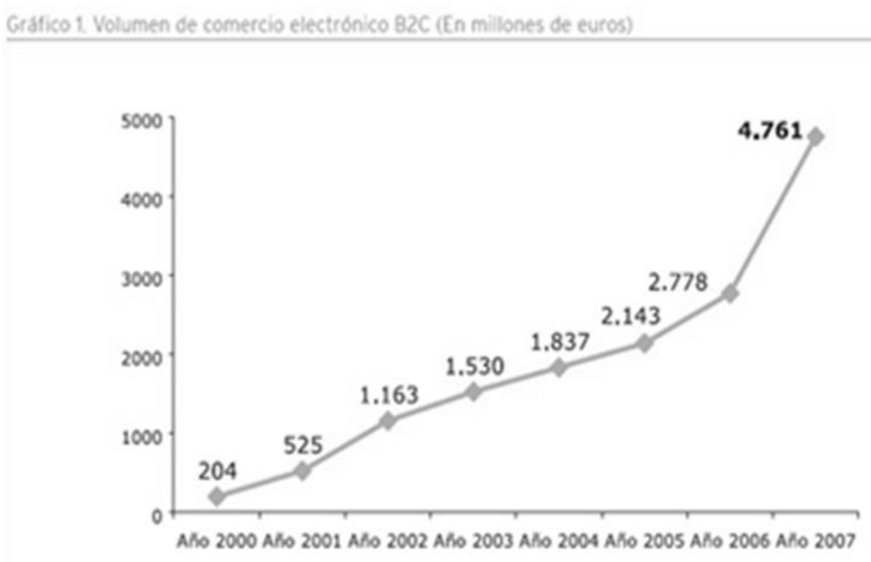
¿Cuál es la razón de cambio de la población en nuestro país del año 1 970 al 2 000?

$$\text{Razon de cambio} = \frac{\text{cambio en la cantidad de poblacion}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{97.4 - 49.1}{2\,000 - 1\,970} = \frac{48.3}{30}$$

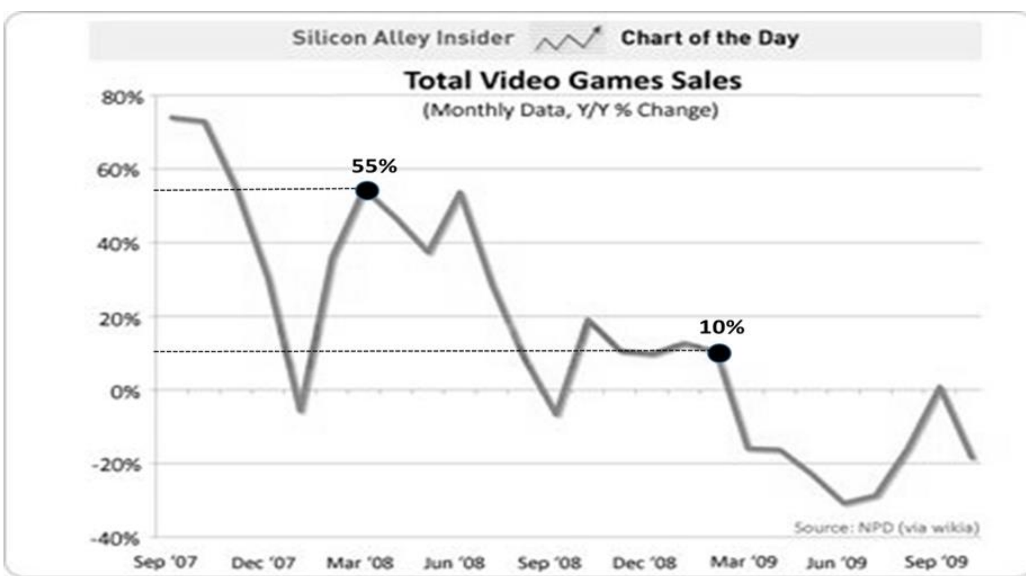
$$\text{Razon de cambio} = 1.61$$

Resuelve los siguientes ejercicios:

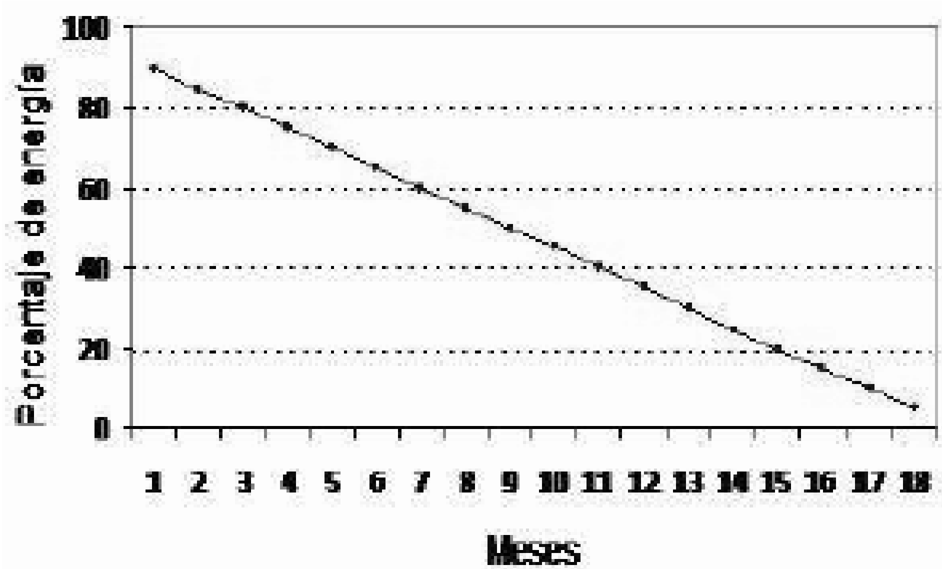
1. En la Comunidad Económica Europea, en los últimos siete años, se ha experimentado un cambio sustancial en el volumen del comercio electrónico. Observa la tabla y determina la razón de cambio del volumen de ventas entre 2003 a 2007.



2. La gráfica muestra el rendimiento comercial de la industria del videojuego durante los dos últimos años. Puede apreciarse que la primera caída importante en las ventas se experimentó después de diciembre de 2 007. ¿Cuál es la razón de cambio en las ventas de videojuegos de marzo de 2 008 a marzo de 2 009?



3. La siguiente gráfica representa el gasto en la carga de una pila de reloj.



¿Cuál es la razón de cambio del tercero al décimo mes?

Pendiente de una recta

Es el grado (medida) de inclinación de una recta, la razón de cambio en y con respecto al cambio en x.

Si una recta pasa por dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces su **pendiente (m)** está dada por:

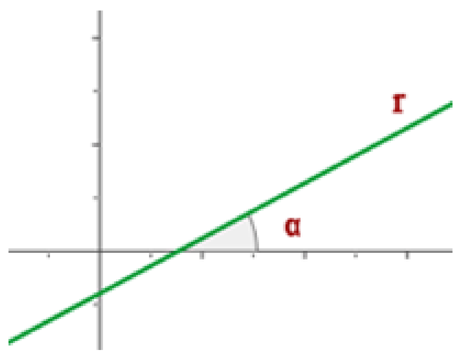
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, donde \;\; x_1 \neq x_2$$

Ésto es:

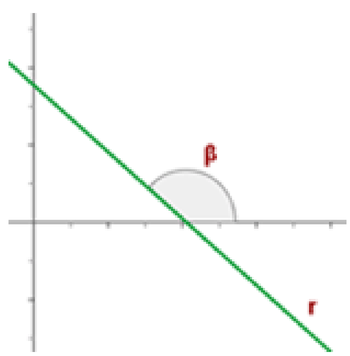
$$m = \frac{cambio\ vertical\ (elevacion)}{cambio\ horizontal\ (desplazamiento)}$$

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas.

Si m > 0 la **función es creciente** y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **agudo**.

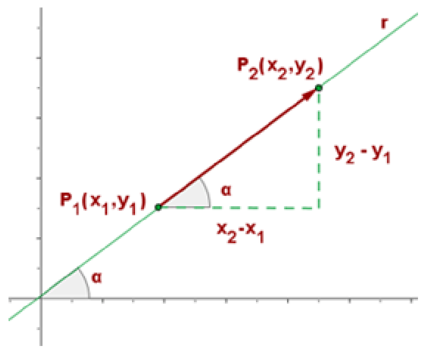


Si m < 0 la **función es decreciente** y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **obtuso**.



La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.

Cálculo de la pendiente:

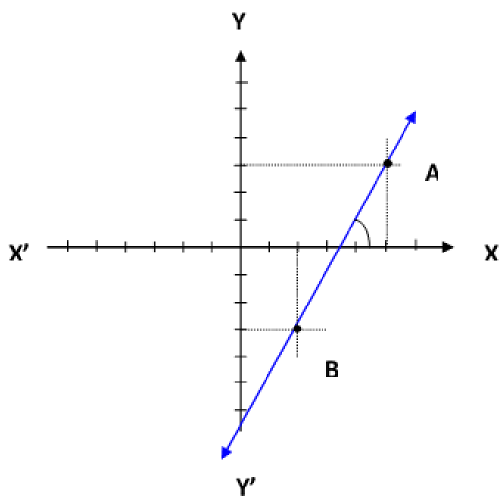


$$tangente\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por ejemplo:

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (5,3) y B (2,- 3)

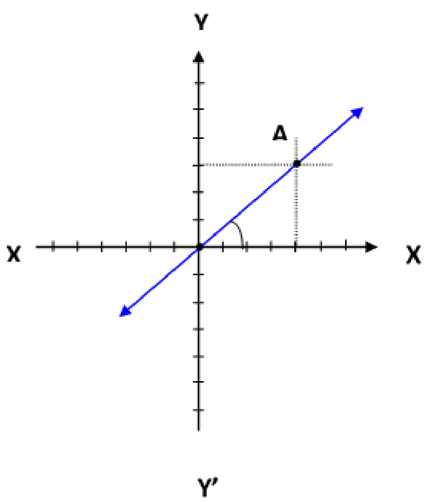


$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}$$

$$\mathrm{m} = \frac{3-(-3)}{5-2} = \frac{3+3}{3} = 2$$

$$\mathbf{Tan\ 2\ =\ 63°43'}$$

Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto A (7,4) y el origen:



$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}$$

$$\mathrm{m} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} = 1.\overline{33}$$

$$\mathbf{Tan\ 1.\overline{33}\ =\ 53°12}$$

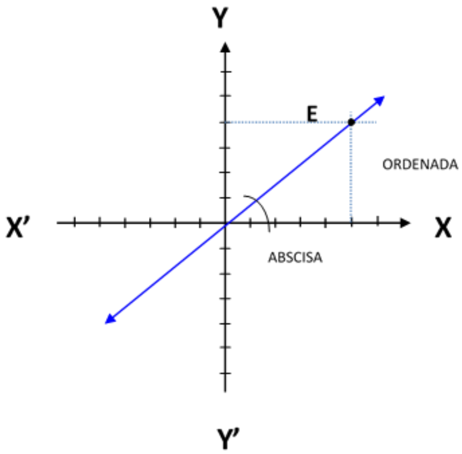
1. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos:
C (-2,-1) y D (-3,2)

2. Buscar la pendiente de los lados del triángulo determinado por los puntos:
A (-1,2) , B (1,3) y C (2, - 4)

3. Calcular la pendiente y la inclinación de la recta formada por los puntos
A (-2,3) y B (8,-5)

Ecuación de la recta que pasa por el origen

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos E (5, 4) y O (0, 0)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4-0}{5-0} = \frac{4}{5}$$

Donde 4 es la ordenada y 5 es la abscisa

$$m = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

Despejando y : $y = mx$

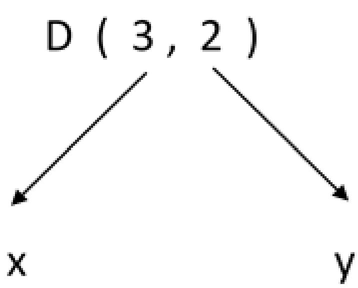
La expresión **y = mx** representa la ecuación de la recta que pasa por el origen

Por tanto, la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{4}{5}x$$

Ejemplos:

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto D (3,2)



$$y = mx$$

$$y = \frac{2}{3}$$

$$m = \frac{y}{x}$$

Es la ecuación de la recta

2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y el H (5, 1)

Buscamos la pendiente:

$$m = \frac{y}{x}$$

$$m = \frac{1}{5}$$

La ecuación de la recta es: $y = \frac{1}{5}x$

Ejercicios:

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y el W (4, -2)

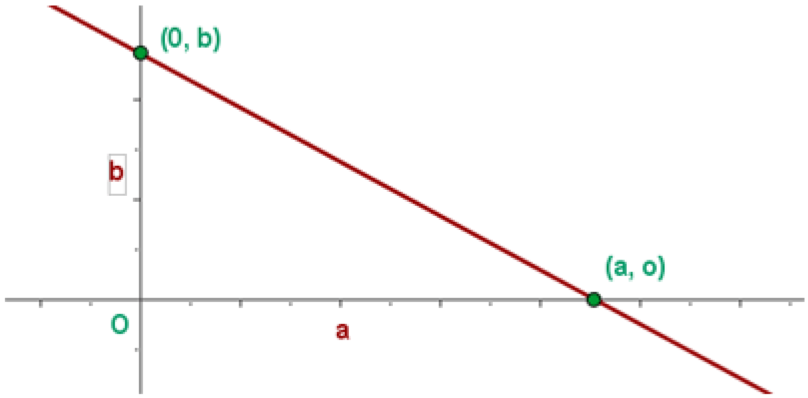
2. Ecuación de la recta que pasa por el origen y el Z (- 8, -2):

3. En la ecuación $y = 3x$, ¿Cuál es la pendiente?

Ordenada al origen

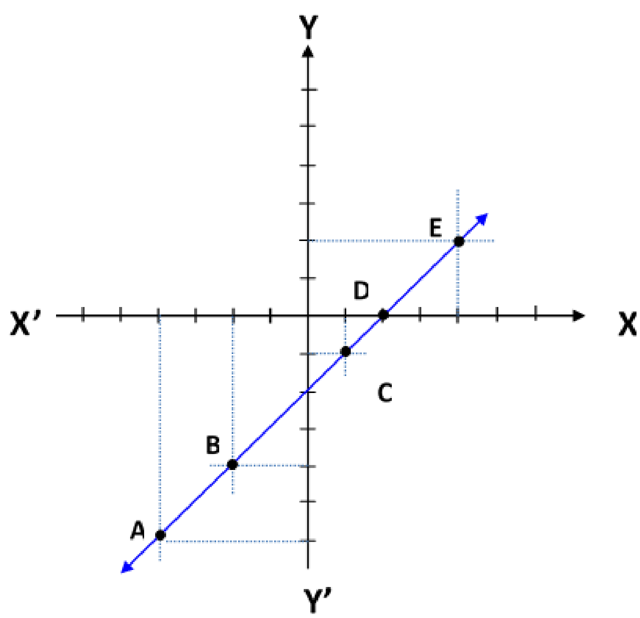
En la ecuación de la recta: y = mx + b

El coeficiente de x es la pendiente, **m** y el término independiente, **b**, se llama ordenada al origen de una recta, siendo (0, b) el punto de corte con el eje de ordenadas.



Pendiente $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}$ y la ordenada al origen es **b**

Por ejemplo:
La gráfica que se presenta a continuación representa la ecuación y = x - 2



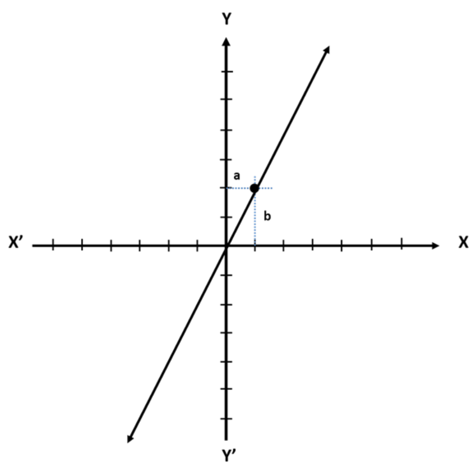
El coeficiente de x representa su pendiente, en este caso **m = 1** y la **ordenada al origen es - 2**

Completa:

Ecuación	Pendiente	Ordenada al origen
y = x – 1	1	- 1
	3	7
y = 2x + 4		
	5x	- 1
y = - x + 4		
	- 2x	3
y = - 3x - 5		

¿Cómo identifico la ecuación de una recta en una gráfica?

Por ejemplo:



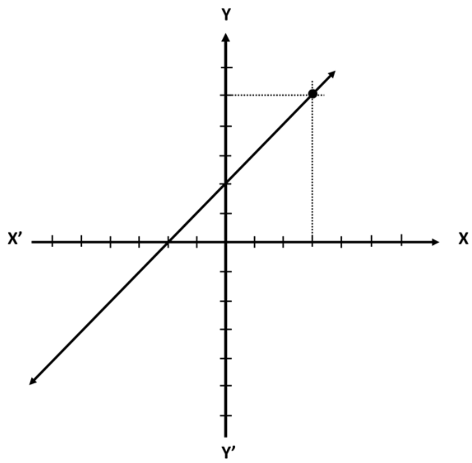
Trazamos la ordenada (b) y la abscisa (a)

$$m = \frac{b}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

Ordenada al origen es igual a 0

y = mx , entonces y = 2x

Ecuación de la recta que se representa en la gráfica:



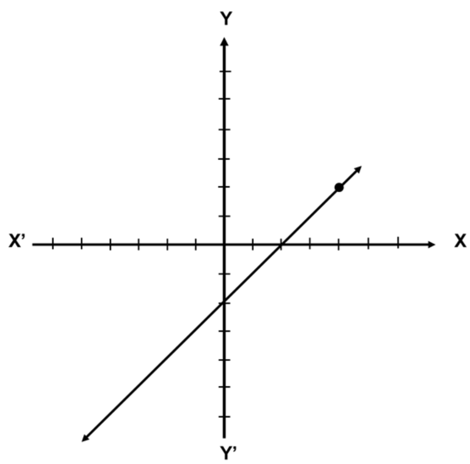
Trazamos la ordenada (b) y la abscisa (a)

$$m = \frac{b}{a}$$

Ordenada al origen es igual a: _____

y = mx+ b , entonces y = 2x

Ecuación de la recta que se representa en la gráfica:



Trazamos la ordenada (b) y la abscisa (a)

$$m = \frac{b}{a}$$

Ordenada al origen es igual a: _____

y = mx+ b , entonces y = 2x

Probabilidad

El concepto de probabilidad nace con el deseo del hombre de conocer con certeza los eventos futuros. La probabilidad mide la frecuencia con la que ocurre un resultado en un experimento bajo condiciones suficientemente estables.

La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la matemática, la ciencia y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales y la mecánica subyacente de sistemas complejos.

La probabilidad de que ocurra un evento aleatorio A es igual al cociente de los **casos favorables en los que pueda ocurrir el evento A** y los **eventos totales del espacio muestra**. Se le conoce como Regla de Laplace y se expresa de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{CASOS \quad FAVORABLES}{CASOS \quad TOTALES}$$

La probabilidad es una **medida sobre la escala 0 a 1** de tal forma que:

a) Al suceso imposible le corresponde el valor 0
b) Al suceso seguro le corresponde el valor 1
c) El resto de sucesos tendrán una probabilidad comprendida entre 0 y 1

Al conjunto ***S*** de todos los resultados posibles de un experimento dado se llama **espacio muestral.** Un resultado particular, esto es, un elemento de ***S***, se llama punto **muestral o muestra.**

Evento, conjunto de resultados o, en otras palabras, subconjunto del espacio muestral.

Podemos combinar eventos para formar nuevos eventos, utilizando las diferentes operaciones con conjuntos:

A U B, evento que sucede sí y solo sí A o B o ambos suceden.
A ∩ B, evento que sucede sí y solo sí A y B suceden simultáneamente.
A^c (complemento de A), evento que sucede sí y solo sí A no ocurre.

A y B son llamados **mutuamente exclusivos**, si son disyuntivo, esto es A∩B = ∅. En otras palabras, mutuamente exclusivos si no pueden suceder simultáneamente.

Calcula la probabilidad de ocurrencia:
Ejemplo 1:
Lanzar un dado y obtener el número que aparece en la cara superior.

Espacio muestral: S = (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Evento A: salir número par .... A = (2, 4, 6)
Evento B: salir número impar .... B = (1, 3, 5)
Evento C: salir número primo .... C = (2, 3, 5)

Entonces:

A U C = (2, 5, 6), es el evento de que el número sea par o primo.
B ∩ C = (3, 5), es el evento de que el número sea impar primo
C^c = (1, 4, 6), es el evento de que el número no sea primo

Probabilidad de un evento simple

1. En una baraja de 52 naipes, hay 13 naipes de cada grupo: corazones, diamantes, espadas y tréboles. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer naipe que se baraje sea una espada?

Espacio muestral: S = (13 corazones, 13 diamantes, 13 espadas, 13 clubes)

Evento A: salir una espada .... A = (13 espadas)

$$\text{Probabilidad (A)} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25$$

2. Se lanzó un dado dos veces y en ambas oportunidades se obtuvo 4. ¿Cuál es la probabilidad de que en un tercer lanzamiento se vuelva a obtener 4?

Espacio muestral: S = (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Evento A: salir un cuatro .... A = (1)

$$\text{Probabilidad (A)} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

3. Se lanzan al aire uno tras otro tres dados de seis caras numeradas del 1 al 6. La probabilidad de que el número de tres cifras que se forme, empiece con 4 es:

4. Una bolsa contiene 4 canicas rojas y 3 canicas azules. Si se saca una canica de la bolsa al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

5. Se lanza una vez un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par, menor que 5?

6. Una tómbola tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Al sacar una de las bolas, la probabilidad de que el número grabado en ella sea divisor de 5 es:

7. Si se lanzan dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de que los números presenten una diferencia de 2 unidades?

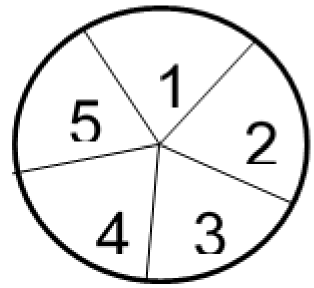
8. En una caja hay 5 lápices negros, 3 lápices verdes y 4 amarillos, entonces ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un lápiz de la caja, éste no sea negro ni verde?

9. En la bolsa hay 50 bolitas, de las cuales 12 son rojas, 5 son verdes, 3 son azules y resto son Blancas. Si se saca una bolita sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea blanca?

10. La probabilidad de que al escoger un número positivo de dos cifras, este sea primo y termine en 3 es:

Probabilidad porcentual

1. Si siempre se acierta en la ruleta de la figura, formada por cinco sectores circulares iguales, ¿Cuál es la probabilidad de que un lanzamiento resulte 2?



2. En una caja se tienen fichas del 1 al 50 numeradas. Si se saca una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número de la ficha extraída no sea mayor que 20?

3. Seleccionamos al azar una carta de la baraja española (48 cartas: oros, espadas, copas y bastos). La probabilidad de que la carta seleccionada sea figura, sabiendo que salió oro es:

4. Una caja contiene una mezcla de bolitas rojas y azules indistinguibles al tacto, que en total suman 8000. Se saca una bolita al azar con reposición y se repite 100 veces este experimento. Se obtuvo 21 veces una bolita roja y 79 veces una de color azul. Entonces, la probabilidad de extraer una bolita roja es:

5. Se escoge información en estudiantes sobre el uso de transporte colectivo para llegar de su casa a la escuela, elaborando la siguiente tabla:

Transporte Colectivo	Alumnos	Alumnas
Usa	60	20
No usa	40	80

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea hombre, dado que usa transporte colectivo es:

Evento Independiente

Se dice que un evento A es independiente de un evento B, si la probabilidad de que A suceda no está influenciada porque B haya o no sucedido.

Definición formal

Dos sucesos son independientes si la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es igual al producto de las probabilidades de que ocurra cada uno de ellos, es decir, si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Por ejemplo:

1. Si se lanza una moneda normal 3 veces, la probabilidad de obtener tres soles es: Cada lanzamiento es independiente de los otros.

$$\text{P (Tres soles)} = \text{P (Sol)} \bullet \text{P (Sol)} \bullet \text{P (Sol)}$$

$$\text{P (Tres soles)} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2. Se extrae una carta de una baraja de 52 naipes. Se repone y se extrae una segunda carta. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean reyes?

3. Se lanza un dado dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo un número impar?

4. Una persona que participa en un concurso debe responder verdadero o falso a una afirmación que se le hace en cada una de las seis etapas. Si la persona responde al azar, la probabilidad que aciertes en las seis etapas es:

5. Un test de selección múltiple consta de 30 preguntas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas siendo sólo una de ellas correcta. Si un alumno responde al azar cada pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que todas sus respuestas sean correctas?

Extracción sin reposición

Ejemplo:

1. Un estuche contiene 3 lápices rojos y 2 negros. Si se sacan uno a uno 2 lápices sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que esos lápices sean negros?

$$P\ (primer\ lápiz\ negro) = \frac{2}{5}$$

$$P(segundo\ lápiz\ negro) = \frac{1}{4}$$

$$Probabilidad\ de\ sacar\ dos\ lápices\ negros\ es: \frac{2}{5} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

2. En una tómbola hay 3 bolas rojas y 5 blancas. Se extraen una a una y sin reposición, dos bolas. La probabilidad de que ambas resulten rojas es:

3. Pedro tiene un llavero con 4 llaves y solo una de ellas abre una puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que si prueba las llaves, logre abrir la puerta al tercer intento sin usar una llave más de una vez?

4. En una tómbola hay 5 bolitas, 2 negras y 3 rojas, se extraen dos, de una en una y sin reposición. Entonces, la probabilidad de que ambas resulten negras es:

5. Se toman una a una y sin reposición, cinco cartas de una baraja de 52. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro primeras sean ases y la última, reina de diamantes?

Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes sí y solo sí uno de ellos puede tener lugar en un mismo tiempo. Es decir, uno o el otro, pero no pueden suceder al mismo tiempo.

Sea A y B, dos eventos excluyentes, entonces:

P (A o B) = P (AUB) = P(A) + P (B), se lee "probabilidad de que suceda AUB es igual a la suma de sus probabilidades".

Ejemplo 1:

Una encuesta sobre tránsito demuestra que en cierta intersección, la probabilidad de que los vehículos den vuelta a la izquierda es de 0.15, de 0.31 si san vuelta a la derecha, y de 0.54 si siguen de largo. Calcular la probabilidad de que un auto de vuelta a la izquierda o a la derecha.

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{I}\cup\mathrm{D}) = \mathrm{P}\,(\mathrm{I}) + \mathrm{P}\,(\mathrm{D})$$

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{I}\cup\mathrm{D}) = 0.15 + 0.31 = 0.46$$

Ejemplo 2:

Se lanzan dos dados: uno blanco y uno negro. Encontrar la probabilidad de que el dado blanco muestre un número menor que 3 o que la suma de los puntos que aparecen en los dados sea mayor que 9.

Evento A: Dado blanco muestre 1 o 2
Evento B: Suma ambos dados sea 10, 11, 12 (5,5), (6,4), (6,6), (6,5), (5,6), (4,6).

$$\mathrm{P(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P(A\cup B)} = \mathrm{P\,(A)} + \mathrm{P\,(B)} - \mathrm{P\,(A \cap B)}$$

$$\mathrm{P\,(A\cup B)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{2}$$

3. Se lanza un par de dados, el evento T se define como la ocurrencia de "un total de 10 u 11", y el evento D es la ocurrencia de "dobles". Encontrar P (T o D).

4. Se elige al azar un número entero positivo de 1 al 19. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 3 o de 5?

5. De una baraja inglesa de 52 cartas se extrae una al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que resulte 8 o trébol?

6. Se elige al azar un número entero entre los 30 primeros enteros positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea primo o múltiplo de 5?

7. Una ruleta tiene 36 sectores circulares iguales, numerados del 1 al 36. Los 12 primeros son rojos, los 12 siguientes azules y los 12 restantes negros. En este juego gana el número que sale indicado después de girar la ruleta. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar o un número de color rojo?

Eventos complementarios

Dos eventos se denominan complementarios cuando su unión da el espacio muestral y su intersección es vacía. La suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es igual a 1.

$$P\ (A^c)\ =\ 1 - P(A)$$

Ejemplo 1:

En un contenedor hay 1 000 ampolletas, de las cuales $\frac{1}{40}$ son defectuosas. Si se saca una ampolleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una ampolleta no defectuosa?

Evento A: obtener una ampolleta defectuosa

$$P\ (A^c)\ = 1 - P(A)$$

$$P\ (A^c) = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$$

$$1\ 000 \bullet \frac{39}{40} = 975$$

975 ampolletas no están defectuosas

Ejemplo 2:
Se lanza dos veces una moneda, ¿Cuál es la probabilidad de no obtener dos águilas?
Cada evento de lanzar monedas es independiente, por tanto:

$$P(A) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P\ (Ac)\ = 1 - P(A)$$

$$P\ (\text{no obtener dos aguilas}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3. La probabilidad de que un evento suceda es 0.25, entonces, la probabilidad de que no suceda dicho evento es:

4. En un curso de 50 alumnos, las notas de la asignatura de inglés tienen la siguiente distribución:

Notas	Hasta 2.9	Entre 3.0 y 3.9	Entre 4.0 y 7.0
No. de alumnos	15	10	25

Al elegir un alumno del curso al azar, la probabilidad de que no tenga una nota entre 3.0 y 3.9 es:

5. Según un informe del tiempo, se pronostica para mañana una probabilidad de lluvia de 0.4, así como 0.7 de que haga frío. Si ambos sucesos son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que mañana no llueva ni tampoco haga frío?

6. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, no se obtenga una suma igual a 10?

7. Se calcula que la probabilidad de que un futbolista convierta un penal es de 0.89, ¿cuál es la probabilidad de que no convierta el penal?

Resultados equiprobables y no equiprobables

Se dice que sucesos posibles de un experimento son equiprobables cuando la probabilidad de ocurrencia de ambos sucesos es la misma. Matemáticamente:

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{E}) = \mathrm{P}\ (\mathrm{F})$$

Por ejemplo:

Se lanza un dado al aire, hallar la probabilidad de que aparezca:
a) Número par
b) Número primo

Espacio muestral = (1, 2, 3, 4, 5, 6)

$$P(numero\ par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(numero\ primo) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

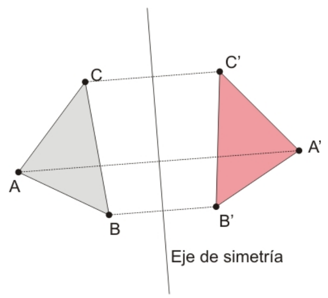
Probabilidades de ocurrencia son iguales, por tanto son ejemplos de resultados equiprobables

Transformaciones isométricas

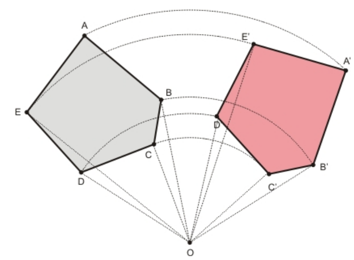
Son movimientos de figuras en el plano que se realizan sin variar las dimensiones ni el área de las mismas; la figura final e inicial son semejantes, y geométricamente congruentes

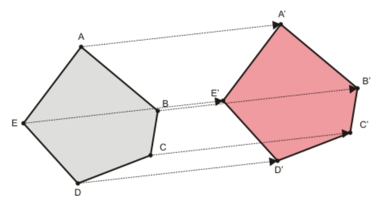
Tipos de isometrías:

Simetría



Rotación



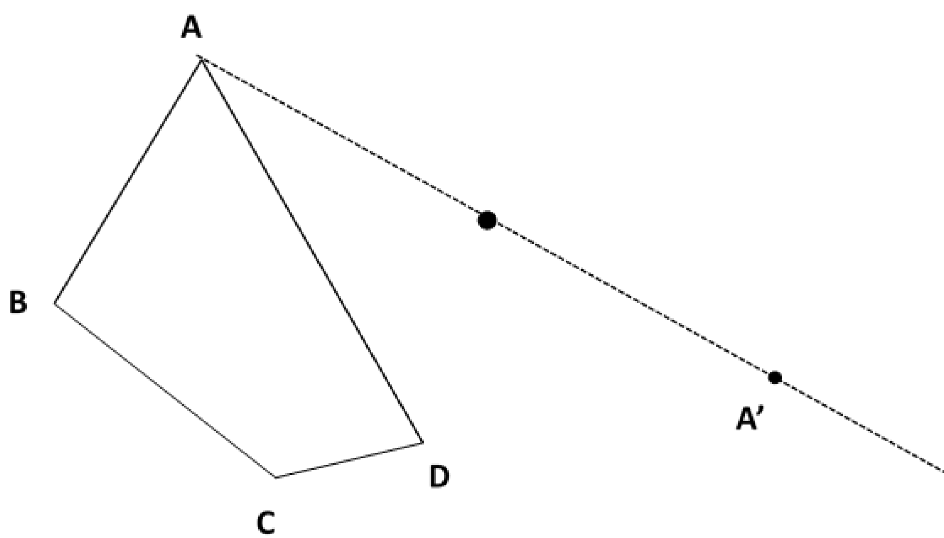


Traslación

Simetría

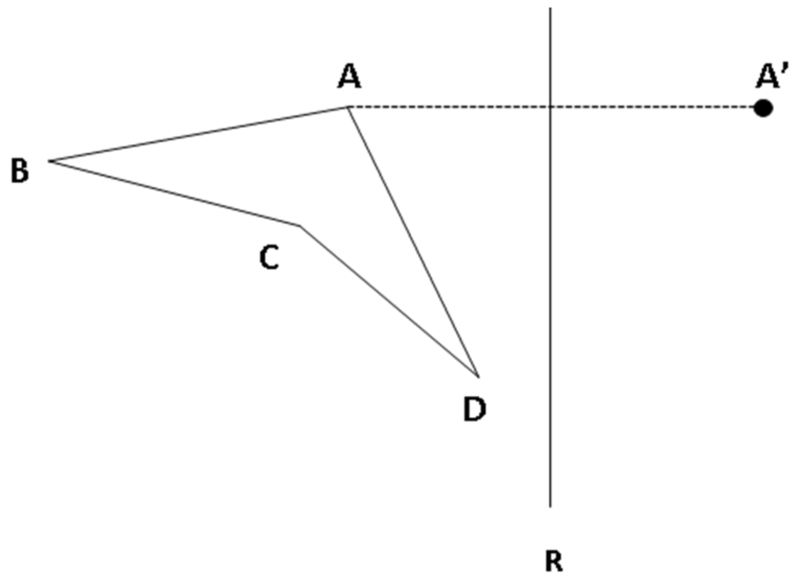
Simetría Central: para aplicar este tipo de simetría, debemos pasar todos los puntos por el centro y con la misma distancia de cada punto al centro, ubicar los puntos transformados. Unimos puntos y formamos la figura.

Termina el ejercicio



Simetría Axial: trazamos perpendiculares al eje de simetría desde cada uno de los puntos que limitan la figura. Medimos distancias y ubicamos los puntos transformados. Unimos puntos y formamos la figura.

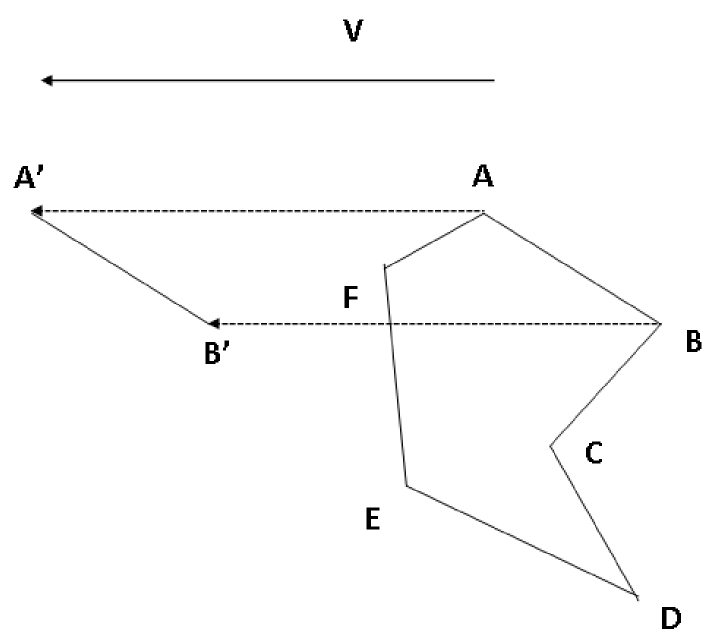
Termina el ejercicio



Traslación

Es una isometría que realiza un cambio de posición, es el cambio de lugar, es determinada por un vector. Trazamos vectores paralelos de igual longitud a partir de cada uno de los puntos. Ubicamos los puntos transformados, los unimos y formamos la figura.

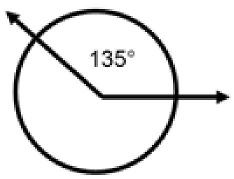
Termina el ejercicio

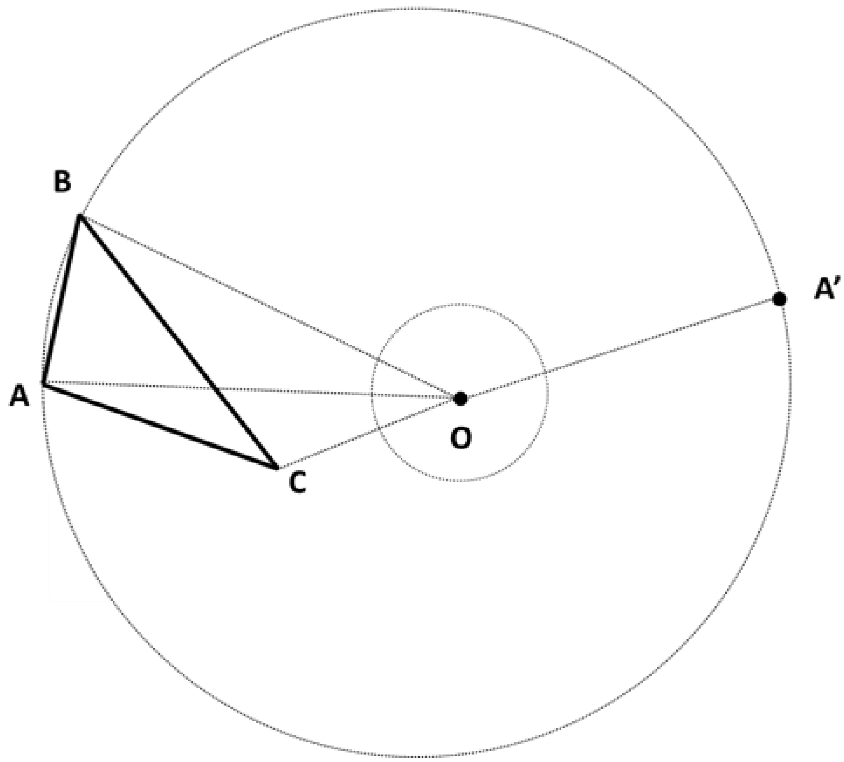


Rotación

Es un movimiento de cambio de orientación. La rotación es un movimiento angular de cada uno de los puntos. Es indispensable dar un ángulo, el centro de giro y el sentido de la rotación.
Unimos los vértices del polígono con el centro O y trazamos arcos que toquen sus vértices.
Con centro en O, trazamos arcos que toquen los vértices del polígono.
Medimos los ángulos.
Ubicamos los puntos transformados y unimos los partes para encontrar la rotación solicitada.

Termina el ejercicio

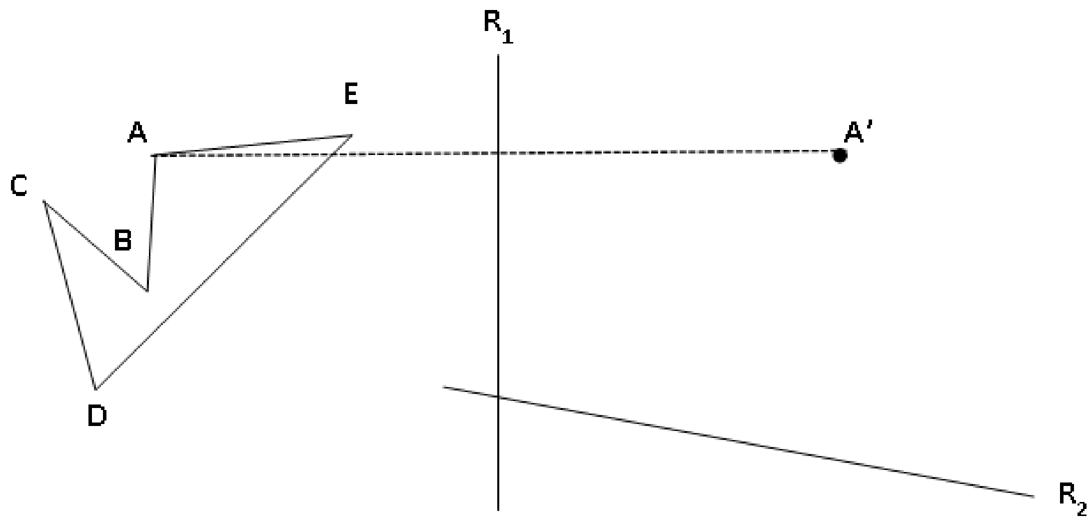




Los movimientos en el plano pueden combinarse para obtener diferentes diseños, por ejemplo:

Composición de simetrías axiales
Ejes no paralelos

Termina el ejercicio

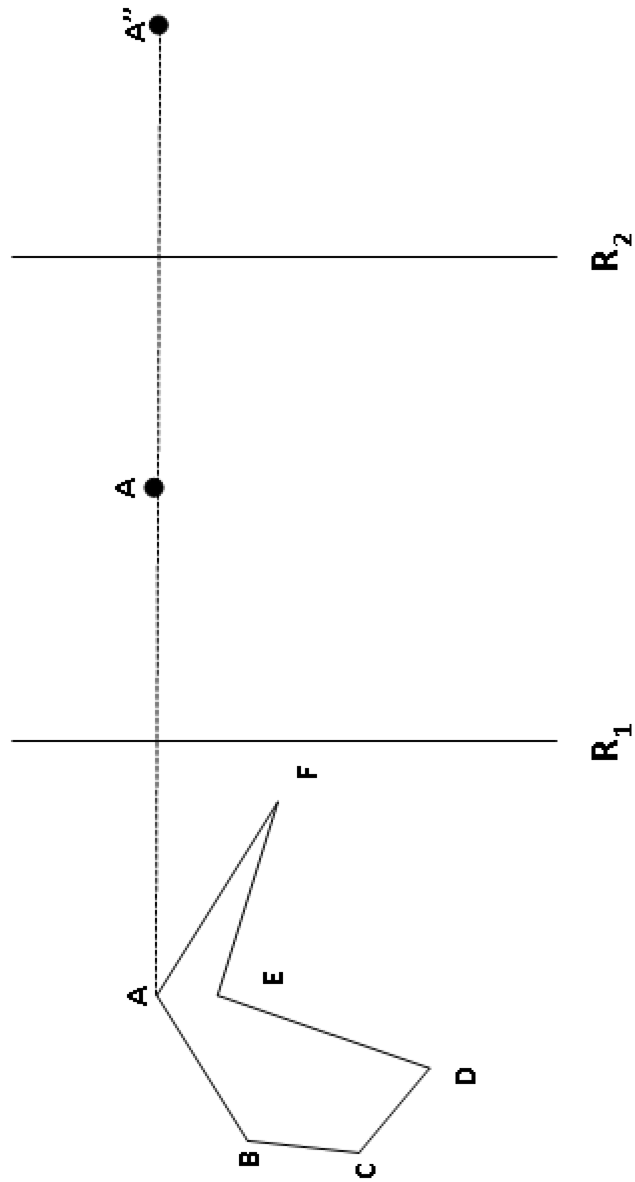


¿Cómo es la primera figura con respecto a la tercera?

La aplicación de una doble simetría axial con los ejes no paralelos, ¿a qué equivale?

Composición de simetrías axiales
Ejes paralelos

Termina el ejercicio



¿Cómo es la primera figura con respecto a la tercera?

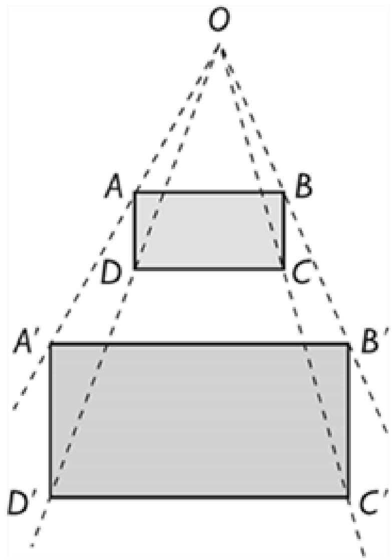
La aplicación de una doble simetría axial con los ejes paralelos, ¿a qué equivale?

Homotecia

Transformación geométrica que ***no genera una imagen congruente***.
Partiendo de un punto escogido arbitrariamente, centro de homotecia, **se obtienen figuras de mayor o menor tamaño.**

HOMOTECIA DIRECTA

Homotecia de centro el punto *O* y razón *k* > 0

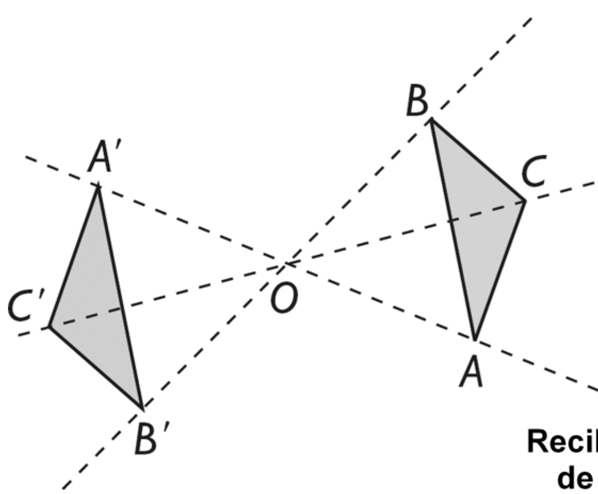


Recibe el nombre de homotecia positiva

A y A’ están del mismo lado del punto O

HOMOTECIA

Homotecia de centro el punto *O* y razón *k* < 0



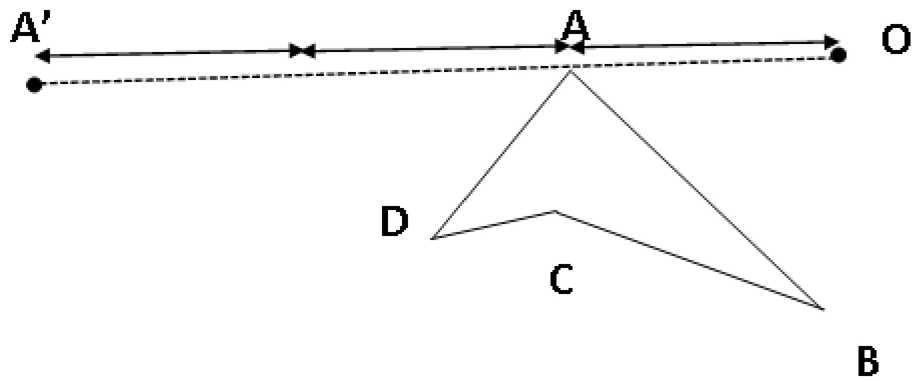
Recibe el nombre de homotecia positiva

A y A’ están en distinto lado del punto O

Usa tu equipo geométrico y construye una homotecia directa y una inversa.

Homotecia directa

A partir del centro de homotecia O, trazamos rectas hacia los vértices del polígono.
Medimos distancias AO, AB, OC y OD. Se multiplica **r – 1** veces sobre las rectas trazadas.
Ubicamos los puntos transformados.
Unimos los puntos transformados y encontramos la figura homotética.



Razón = 3
Amplificación

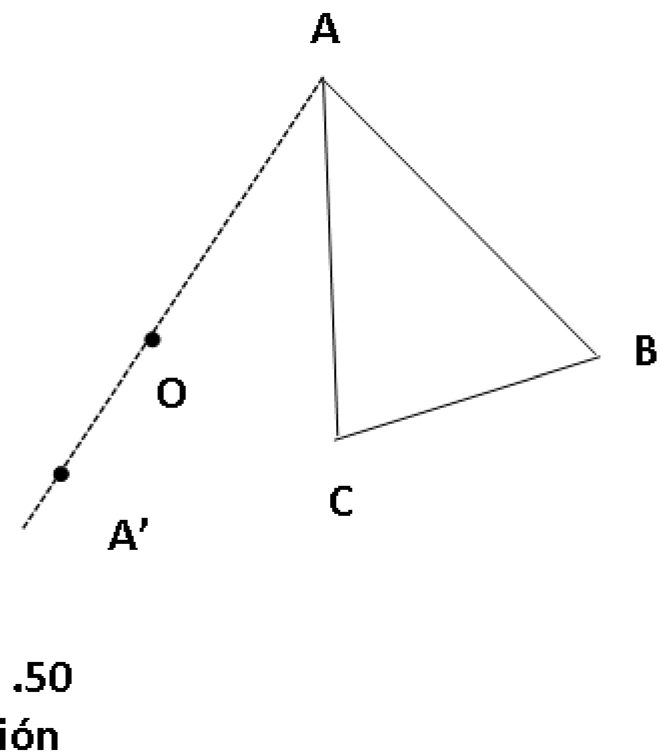
Homotecia inversa

A partir de los vértices del polígono, trazamos rectas hacia el centro de homotecia O

Medimos distancias AO, AB, OC. Se multiplica $\frac{1}{2}$ veces sobre las rectas trazadas.

Ubicamos los puntos transformados.

Unimos los puntos transformados y encontramos la figura homotética.



RESOLUCION DE PROBLEMAS

LECTURA CUIDADOSA HASTA ENTENDER LA SITUACION QUE SE PLANTEA

IDENTIFICAR CANTIDADES

CONOCIDAS

DESCONOCIDAS

UNA SE REPRESENTA POR "x"

OTRAS EN FUNCION DE ESTA LETRA

IDENTIFICAR IGUALDADES
(CONSTRUIR LA ECUACION)

ENCONTRAR LA SOLUCION

Ejemplo 1:

El producto de dos números consecutivos pares es 48. Encontrar esos números.

Primer número : x

Segundo número : $x + 2$

$x(x+2) = 48$ Verificando operaciones

$x^2 + 2x = 48$ Transponer e igualar a cero

$\boxed{x^2 + 2x - 48 = 0}$

Resolvemos la ecuación

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x+8)(x-6) = 0$

$(x + 8) = 0$

$\boxed{x = -8}$

$(x - 6) = 0$

$\boxed{x = 6}$ *

Primer número : $\boxed{6}$

Segundo número : $6 + 2$ $\boxed{8}$

Los números son 6 y 8

Ejemplo 2:

El área de un rectángulo es 36 m², su base excede a la altura en 5 m. Encontrar las dimensiones del rectángulo.

Base :	$x + 5$	$x(x+5) = 36$	Verificando operaciones
Altura :	x	$x^2 + 5x = 36$	Transponer e igualar a cero

$$\boxed{x^2 + 5x - 36 = 0}$$

Resolvemos la ecuación

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$
$$(x+9)(x-4) = 0$$
$$(x+9) = 0$$
$$\boxed{x = -9}$$
$$(x-4) = 0$$
$$\boxed{x = 4} \ *$$

Base: $4 + 5$ $\boxed{9 \text{ metros}}$

Altura : $\boxed{4 \text{ metros}}$

Dimensiones : 9 m de base y 4 m de altura

Resuelve los siguientes problemas:

1. Margarita compró para una fiesta, 5 gelatinas y 8 rebanadas de pastel por \$ 136.00. Su prima Carolina gastó \$ 52.00 en comprar de 2 gelatinas y 3 rebanadas de pastel, las dos acudieron a una misma tienda comercial, ¿Cuánto costó cada uno de los productos?

2. La suma de dos números es 22 y su producto equivale a 117. ¿Cuáles son esos números?

3. Miguel tiene en su cartera 15 billetes de $ 50 y $ 100. Sí en total tiene reunidos $ 1050, ¿Cuántos billetes tiene de cada denominación?

4. El área de un triángulo rectángulo mide 84 m^2. Encontrar las dimensiones de los catetos si sabemos que uno excede al otro en 17 unidades.

5. Un granjero tiene en un corral 25 animales entre borregos y gallinas. Al atardecer, los encierra en un corral y cuenta un total de 64 patas. ¿Cuántos animales tiene de cada uno?

6. El producto de dos números enteros positivos es 143, sí sabemos que el mayor excede en 2 unidades al menor, ¿Cuáles son los números?

7. La diferencia de dos números es 2 y su suma multiplicada por el mayor equivale a 40. Encontrar los números.

Proporcionalidad y funciones
Representación gráfica, tabular y algebraica de diferentes situaciones y fenómenos.

1) Un avión dejó caer una motocicleta desde una altura de 980 m. Algunos datos que se registraron son:

Tiempo Segundos	Distancia de caída	Altura a la que se encuentra la motocicleta
0	0	980
1	20	960
2	80	900
3	180	
4		660
5	500	480
6		
		0

¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la distancia de caída (d) en función del tiempo transcurrido (t)?

a) $d = 5\,t^2$ b) $d = 25\,t^2$ c) $d = 20\,t^2$ d) $d = 20 + t^2$

2) Un autobús viaja a una velocidad constante, algunas distancias y tiempos de recorrido se muestran en la siguiente tabla:

Tiempo (h)	1.5	3		8	9	
Distancia (Km)		270	450		810	900

¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la distancia recorrida?

a) $d = 45\,t$ b) $d = 80\,t$ c) $d = 90 + t$ d) $d = 90\,t$

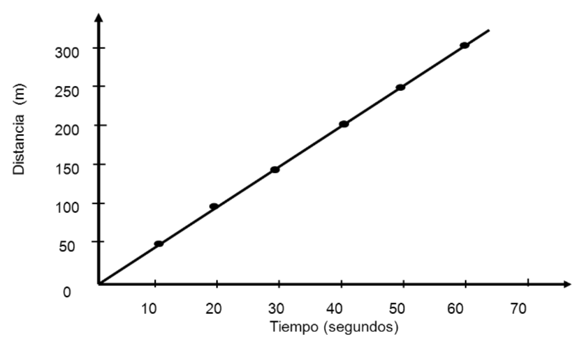
3) El número de pasajeros del tren ligero va aumentando conforme pasan los minutos, en la siguiente tabla se muestra este aumento:

Minutos	Pasajeros
1	6
2	12
3	20
4	30
5	42
6	56

¿Cuál ecuación representa el número de pasajeros que dependen de los minutos?

a) $x^2 - 3x + 2$ b) $x^2 + 2x + 3$ c) $x^2 + 3x - 2$ d) $x^2 + 3x + 2$

4) Un deportista corre desplazándose como lo describe la siguiente gráfica:



Si se quiere representar estos datos en una tabla, ¿cuál de las siguientes opciones muestra la forma correcta de hacerlo?

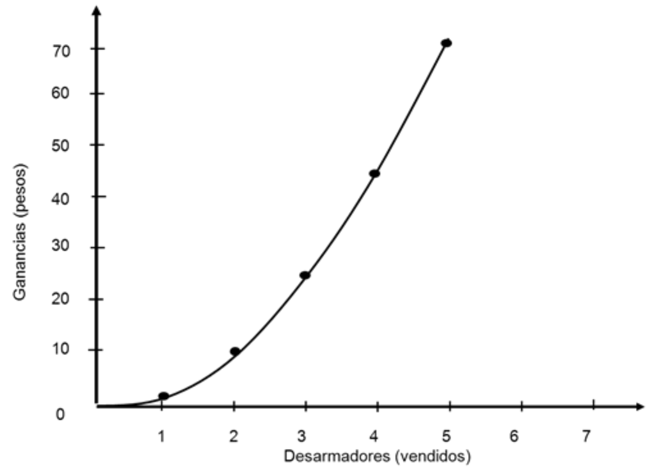
a	
seg	m
0	50
10	100
20	150
30	200
40	250
50	300
60	350

b	
seg	m
50	10
100	20
150	30
200	40
250	50
300	60
350	70

c	
seg	m
0	0
10	50
20	100
30	150
40	250
50	300
60	350

d	
seg	m
10	50
20	100
30	150
40	200
50	250
60	300
70	350

5) El costo de fabricación de un desarmador plano y las ganancias por su venta, se muestran en la siguiente gráfica:



¿Cuál es la ecuación algebraica que determina las ganancias dependiendo de las ventas de los desarmadores?

a) $y = 3x^2 – 2$ b) $y = 2x^3 – 3$ c) $y = 3x^2 – 3$ d) $y = 3x^2 + 2$

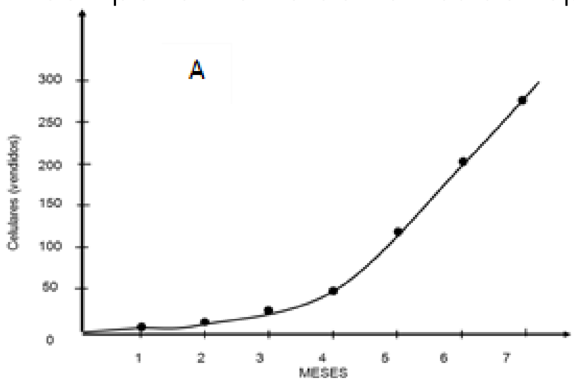
6) En una granja de cerdos cuentan los lechones (crías) que nacen cada mes y con los datos obtenidos hicieron la siguiente tabla:

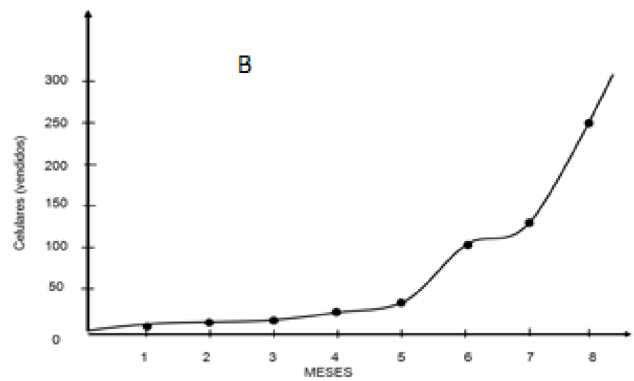
Meses	Lechones
0	8
1	23
2	68
3	143
4	248
5	383
6	548

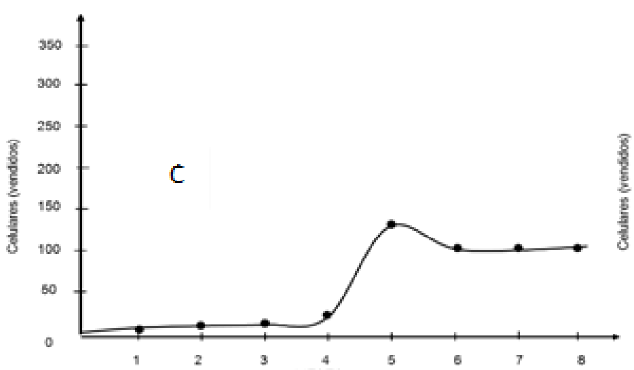
¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la tasa de natalidad de los lechones?

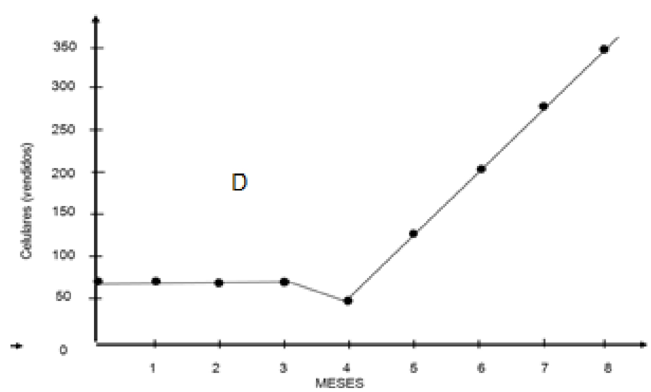
a) $8x^2 + 15$ b) $15x^2 + 8$ c) $15x^2 – 8$ d) $15x + 8$

7) Lupita es una vendedora de celulares y lleva un registro de las ventas que hizo durante los 8 primeros meses. Ella vendió en los primeros 5 meses un número de celulares igual al cubo del número del mes, a partir de ahí vendió 75 celulares por mes ¿Qué gráfica muestra el comportamiento de ventas de Lupita?

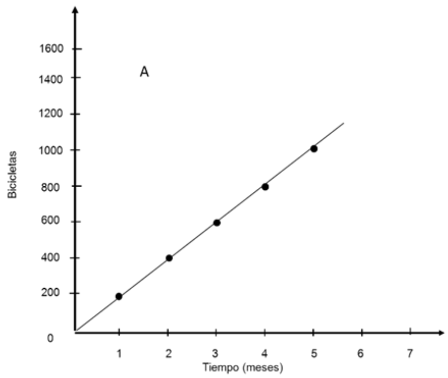


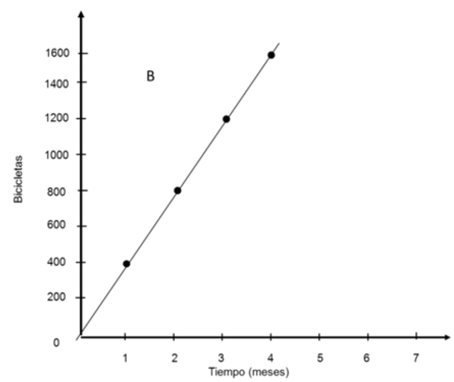


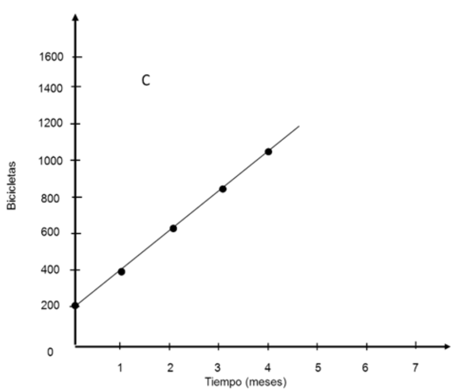


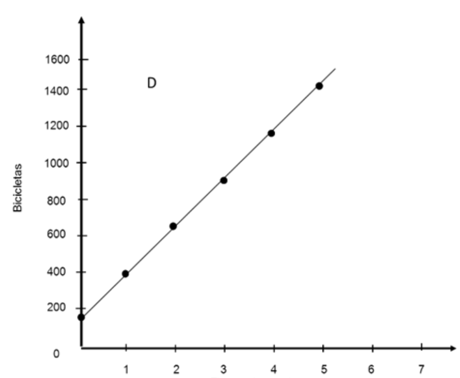


8) Una fábrica de bicicletas tiene una existencia de 150 unidades. Si cada mes produce 250 que se almacenan con la producción anterior, ¿Cuál es la gráfica que describe la cantidad de bicicletas que se guardarán en la bodega durante los 5 meses siguientes?

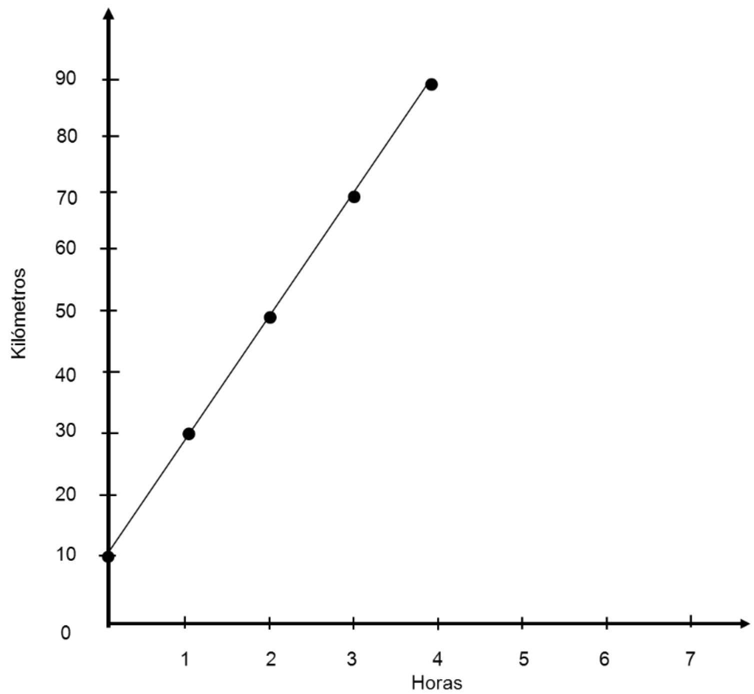








9) El trayecto de un ciclista está representado en la siguiente gráfica:



¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa el trayecto del ciclista?

a) $y = 10x + 10$ b) $y = 20x + 10$ c) $y = 30x - 10$ d) $y = 10x + 20$

10) En una fábrica de juguetes, la producción de patinetas es constante durante 8 horas. Si el conteo de patinetas inicia desde cero y a la quinta hora se han producido 135 patinetas, ¿Qué tabla representa el comportamiento de la producción de patinetas?

a	
horas	patinetas
0	3
1	9
2	27
3	81
4	108
5	135
6	162
7	189
8	216

b	
horas	patinetas
0	27
1	54
2	81
3	108
4	135
5	162
6	189
7	216
8	243

c	
horas	patinetas
0	0
1	27
2	54
3	81
4	108
5	135
6	162
7	189
8	216

d	
horas	patinetas
0	0
1	25
2	50
3	75
4	105
5	135
6	165
7	200
8	235

Medidas de dispersión
Las medidas de dispersión nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de una distribución. Las medidas de dispersión son: rango o recorrido, desviación media y desviación estándar.

Rango o recorrido (amplitud total): es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de una distribución. Se representa con el símbolo AT y se expresa en la forma siguiente:

$$\mathbf{AT = x_M - x_m}$$

Ejemplo:

1. Calcúlese la amplitud total de los siguientes datos:
70 , 25, 80, 90, 28, 31, 46, 57, 100, 26, 98, 94, 73, 62

Puntuación Mayor: 100 Puntuaciones menores: 25

$$AT = 100 - 25$$
$$\boxed{AT = 75}$$

2. Se aplicó un examen de Historia a un grupo de Tercero de Secundaria, los aciertos obtenidos fueron:

89, 88, 87, 84, 80, 78, 77, 77, 75, 74, 74, 72, 70, 68, 67, 65, 49, 43 y 42 .

Encuentra la amplitud total o rango.

3. La altura en centímetros de los alumnos del Tercer Año “A” de la Escuela Secundaria Diurna No. 191 se muestra a continuación:

168	170	171	171	172	172	172	172	174	174	174	174	174	175	175
175	175	175	176	176	176	176	176	177	177	177	177	177	177	177
178	178	178	178	178	179	179	180	180	180					

¿Cuál es el rango o amplitud total?

4. Se encuestó a habitantes de una colonia del Distrito Federal sobre su gusto por la lectura. Se les preguntó la cantidad de libros que leyeron durante los últimos tres meses.

Sus respuestas fueron: 11, 8, 7, 10, 9, 6, 3, 2, 9, 12, 6, 8, 7, 11, 1, 5, 8, 9, 12, 14 .

Calcula el rango a amplitud total.

Desviación media, desviación con respecto a la media. Diferencia entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.

Desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones con respecto a la media aritmética. Se expresa en la forma siguiente:

$$D.M. = \frac{\Sigma\,|x'|}{N}$$

Donde **D.M**. significa desviación media, **Σ |x'|** representa la sumatoria de los datos y **N** el número de casos

Por ejemplo:

1. Sean los datos:

15, 17, 19, 19, 20, 20, 20, 22, 28, 30

Determinamos la **media aritmética**:

Σ |x| = 15 + 17 + 19 + 19 + 20 + 20 + 20 + 22 + 28 + 30 = 210
N representa 10 casos

$$\bar{x} = \frac{\sum|x|}{N} = \frac{210}{10} = 21$$

Determinamos desviaciones de acuerdo a esa media aritmética:

15	17	19	19	20	20	20	22	28	30
(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)	(15-21)
-6	-4	-2	-2	-1	-1	-1	1	7	9

Obtenemos la sumatoria de **desviaciones absolutas**:

$$\sum|x'| = |-6| + |-4| + |-2| + |-2| + |-1| + |-1| + |-1| + |1| + |7| + |9| = 34$$

Buscamos la **desviación media**:

$$D.M. = \frac{\Sigma\,|x'|}{N} \qquad D.M. = \frac{34}{10} = 3.4$$

Podemos disponer la información en una tabla:

x	f	x'	f | x' |
30	1	+ 9	9
28	1	+ 7	7
22	1	+ 1	1
20	3	- 1	3
19	2	- 2	4
17	1	- 4	4
15	1	- 6	6
	N = 10		Σ f |x'| = 34

Media aritmética = 21

$$D.M. = \frac{\Sigma\,|x'|}{N} \qquad D.M. = \frac{34}{10} = 3.4$$

Significa que los datos se separan de la media aritmética en promedio 3.4 puntos

2. Se encuestó a habitantes de una colonia del Distrito Federal sobre su gusto por la lectura. Se les preguntó la cantidad de libros que leyeron durante los últimos tres meses. Sus respuestas fueron: 11, 8, 7, 10, 9, 6, 3, 2, 9, 12, 6, 8, 7, 11, 1, 5, 8, 9, 12, 14 ¿Cuál es la desviación media?

- Organizamos los datos de mayor a menor:

14 12 12 11 11 10 9 9 9 8 8 8 7 7 6 6 5 3 2 1

- Construimos las columnas: **x** , **f** , **x'** y **f|x'|**

x	f	x'	f | x' |
14	1	6.1	6.1
12	2	4.1	8.2
11	2	3.1	6.2
10	1	2.1	2.1
9	3	1.1	3.3
8	3	0.1	0.3
7	2	-0.9	1.8
6	2	-1.9	3.8
5	1	-2.9	2.9
3	1	-4.9	4.9
2	1	5.9	5.9
1	1	- 6.9	6.9
	N = 20		Σ f | x' |= 52.4

Media aritmética = 7.9

- Encontramos la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum|x|}{N} = \frac{158}{20} = 7.9$$

- Determinamos desviaciones de acuerdo a la media aritmética.
- Encontramos la sumatoria de desviaciones absolutas.
- Calculamos la desviación media:

$$D.M. = \frac{\sum |x'|}{N} \qquad D.M. = \frac{52.4}{20} = 2.62$$

Significa que los datos se separan de la media aritmética en promedio 2.62 puntos

3. En una escuela secundaria, se aplicó un examen de 20 aciertos sobre balanceo de ecuaciones. Los resultados obtenidos por los alumnos se muestran en la siguiente tabla:

14	**7**	**12**	**15**	**4**	**7**	**5**	**12**	**12**	**13**
13	**18**	**18**	**4**	**17**	**11**	**11**	**4**	**12**	**5**
14	**14**	**17**	**13**	**12**	**4**	**15**	**7**	**16**	**19**
9	**12**	**19**	**14**	**14**	**15**	**18**	**15**	**13**	**19**

Calcular la desviación media de los puntajes obtenidos por los alumnos.

- Construimos una tabla con las columnas **x** , **f** , **x’** y **f|x’|**

x	f	x’	| x’ |
19	3	3(6.7)	20.1
18	3	3(5.7)	17.1
17	2	2(4.7)	9.4
16	1	3.7	3.7
15	5	5 (2.7)	13.5
14	5	5 (1.7)	8.5
13	4	4 (0.7)	2.8
12	6	6(-0.3)	1.8
11	2	2(-1.3)	2.6
9	1	1(-3.3)	3.3
7	3	3(-5.3)	15.9
5	1	1(-7.3)	7.3
4	4	4(-8.3)	33.2
	N = 40		Σ x’ = 139.2

Media Aritmética
12.3

- Calculamos la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum |x|}{N} = \frac{491}{40} = 12.3$$

- Calculamos la desviación media:

$$D.M. = \frac{\Sigma\ |x'|}{N} = \frac{139.2}{40} = 3.48$$

Significa que los datos se separan de la media aritmética 3.48 puntos

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Calcúlese la desviación medial de los siguientes datos:

70 , 25, 80, 90, 28, 31, 46, 57, 100, 26, 98, 94, 73, 62

2. Se aplicó un examen de Historia a un grupo de Tercero de Secundaria, los aciertos obtenidos fueron: 89, 88, 87, 84, 80, 78, 77, 77, 75, 74, 74, 72, 70, 68, 67, 65, 49, 43 y 42 . Encuentra la desviación promedio entre los aciertos presentados.